

T.M.
(043)53
2021
R 667

TESIS CARRERA DE MAESTRÍA EN FÍSICA

AMPLIFICANDO INFORMACIÓN DE SENSORES CUÁNTICOS CON EL EFECTO ZENÓN CUÁNTICO

Bruno M. Ronchi
Maestrando

Dr. Gonzalo A. Álvarez
Director

Dra. Analía Zwick
Tutora

Miembros del Jurado

Dr. Gonzalo Usaj Jurado (Instituto Balseiro)
Dr. Daniel Dominguez Jurado (Instituto Balseiro)
Dr. Adrián Budini Jurado (CONICET)

4 de Febrero de 2021

Laboratorio de Espectroscopía e Imágenes por Resonancia Magnética
Nuclear,
Departamento de Física Médica

Instituto Balseiro
Universidad Nacional de Cuyo
Comisión Nacional de Energía Atómica
Argentina

INVENTARIO: 24153
23.07.2021
Biblioteca Leo Falicov

A Daniel Córdoba.

Índice de contenidos

Índice de contenidos	v
Resumen	vii
Abstract	ix
1. Introducción	1
2. Conceptos básicos	5
2.1. Formalismo de la matriz densidad	5
2.2. Estimación de parámetros	7
2.2.1. Distancia estadística entre distribuciones de probabilidad	8
2.2.2. Distancia estadística entre estados cuánticos puros	11
2.2.3. Distancia estadística entre estados cuánticos mixtos	12
2.2.4. Información de Fisher de un parámetro	14
3. Estimación del acople en un sistema de dos niveles	17
3.1. Estimación a partir de la evolución coherente libre del sistema	18
3.1.1. Evolución y estimación del término transversal	18
3.1.2. Evolución y estimación de término transversal con perturbación longitudinal	21
3.2. Evolución y estimación con mediciones proyectivas	25
3.3. Amplificando información con QZE: Comparación entre evolución coherente y evolución proyectiva	33
4. Análisis de potenciales aplicaciones de la amplificación de información por Efecto Zenón Cuántico	39
4.1. Espín 1/2 como sensor de un campo magnético alterno fuera de resonancia	39
4.2. Estimación del acople entre dos espines interactuantes	40
4.3. Estimación de acoples en un sistema de tres espines	44
4.4. Estimación de acoples en sistemas de muchos espines interactuantes	45
4.5. Decoherencia inducida como método de proyección	47

4.5.1. Decaimiento exponencial puro	50
4.5.2. Decaimiento espiralado	51
4.5.3. Análisis de la información extraíble	52
5. Conclusiones y resultados	57
A. Derivaciones analíticas de los resultados principales	61
A.1. Información de Fisher Cuántica en función del vector polarización . . .	61
A.2. Información de Fisher Cuántica en subespacios de Hilbert	63
A.3. Evolución de un sistema de dos niveles bajo mediciones proyectivas . .	64
A.4. Estimación de máxima verosimilitud	66
A.5. Información de Fisher Clásica (CFI)	67
A.6. Información de Fisher Cuántica (QFI)	67
A.7. Comportamiento de la CFI	68
A.7.1. Régimen zenón	70
A.7.2. Offset grande	70
A.7.3. Offset pequeño	70
Bibliografía	73
Agradecimientos	77

Resumen

La mecánica cuántica introdujo fenómenos novedosos, cuyo aprovechamiento permite una potencial mejora de las tecnologías respecto de aquellas que no cuentan con ellos. Estas tecnologías son denominadas las “tecnologías cuánticas”, que engloban la computación cuántica, criptografía cuántica, comunicación cuántica y a los sensores cuánticos. En el caso de los sensores cuánticos, sus propiedades cuánticas son utilizadas como recurso para el proceso de estimación de magnitudes (*parámetros*) de interés. La máxima precisión admisible, lo que se llama información, depende fuertemente del esquema de control implementado en el sensor [11].

En particular, dado que en la cuántica, las mediciones afectan al estado del sistema, éstas representan un recurso disponible para definir el esquema de control. El efecto Zenón cuántico congela la evolución del sistema sensor a través de mediciones proyectivas frecuentes, mientras que el efecto anti-Zenón cuántico acelera su evolución temporal. En ambos casos, el control consiste de mediciones estroboscópicas cada algún intervalo de tiempo y ha demostrado ser una herramienta de control de la señal de un espín al que utilizaremos como sensor. En particular, se encontró experimentalmente que esta forma de control reduce la cantidad de parámetros involucrados en la dinámica [17] y, en determinadas circunstancias mejora su precisión [11].

En este trabajo, con el objetivo de desarrollar un marco teórico base, consideramos el control por mediciones proyectivas de sistema de dos niveles regido por un Hamiltoniano independiente del tiempo, para estimar el acople entre los dos niveles. Este modelo posee los elementos esenciales presentes en dinámicas cuánticas más complejas para evaluar la información extraíble utilizando el efecto Zenón cuántico. El acople entre niveles induce una dinámica oscilatoria de intercambio de excitación entre un nivel y otro, mientras que la separación de energía representa un “offset”, poniendo al sistema fuera de resonancia. Encontramos que el tiempo óptimo entre mediciones proyectivas para maximizar la información depende de la intensidad del offset. Para valores altos de offset, cuyo valor está definido por el tiempo de evolución del sensor, las mediciones proyectivas son más eficientes para estimar el acople. Denominamos este concepto *amplificación de información a través del efecto Zenón cuántico*. Ejemplificamos este principio mediante la particularización de este desarrollo a sistemas de interés práctico. También presentamos un mecanismo de medición alternativa, donde el colap-

so del sistema es causado por la interacción con un ambiente ruidoso. Recuperamos en estas circunstancias los resultados obtenidos bajo la suposición de proyección ideal, y exploramos la posibilidad de utilizar el colapso parcial inducido por este ambiente bajo cortos tiempos de interacción como herramienta para medir parámetros del ambiente eficientemente y de forma no invasiva.

Palabras clave: EFECTO ZENÓN CUÁNTICO, INFORMACIÓN CUÁNTICA, METROLOGÍA CUÁNTICA

Abstract

Quantum Mechanics has introduced novel effects, the use of which allows for a potential improvement of the technologies with respect to those that don't count on them. These technologies are called "Quantum Technologies", and encompass Quantum Computation, Quantum Cryptography, Quantum Communication and Quantum Sensors. In the case of Quantum Sensors, their quantum properties can be used as resource for the process of estimation of magnitudes (*parameters*) of interest. The maximum attainable precision, called "information", depends strongly on the control protocol implemented on the sensor [11].

In particular, given that quantum measurements affect the state of the system, they represent a resource when defining the control scheme. The Quantum Zeno Effect freezes the sensor system's evolution through frequent projective measurements, while the Quantum Anti-Zeno Effect speeds up the temporal evolution. In both cases, the control protocol consists of stroboscopic measurements and has proven to be a control tool for the signal of a spin which we'll use as sensor. In particular, it was experimentally shown that this form of control reduces the amount of parameters involved in the dynamics [17] and, in certain circumstances, improve its precision [11].

In this work, with the aim of developing a theoretical basis for this phenomenon, we consider control through projective measurements on a two-level systems governed by a time-independent Hamiltonian, in order to estimate the coupling between the two levels. This model presents the essential elements in more complex quantum dynamics, so as to assess the maximum attainable information by using the Quantum Zeno Effect. The coupling between levels induces an oscillatory exchange of excitation between levels, while the energy splitting represents an "offset", leading the system off-resonance. We find that the optimal time between measurements for maximizing the information depends on the intensity of the offset. For high values of offset, the value of which is defined by the evolution time of the sensor, projective measurements are more efficient for estimating the coupling. We name this concept *information amplification through Quantum Zeno Effect*. We exemplify this principle by particularizing this framework to systems of practical interest. We also present an alternative measurement mechanism, where the collapse of the system is caused by the interaction with a noisy environment. We recover in these circumstances the results obtained through the assumption of ideal

projective measurements, and explore the possibility of using the partial collapse induced by this environment under short interaction times as a tool for the effective and non-invasive measurement of environment parameters.

Keywords: QUANTUM ZENO EFFECT, QUANTUM INFORMATION, QUANTUM METROLOGY

Capítulo 1

Introducción

La mecánica cuántica introdujo una serie de fenómenos desconocidos al ámbito científico, como lo son el entrelazamiento o la superposición cuántica. Estos fenómenos amplían el abanico de recursos, permitiendo potencialmente mejorar el desempeño de las tecnologías con respecto a las que no tienen estas facilidades en consideración. Esto ha dado lugar al campo emergente de las *Tecnologías Cuánticas*, que busca aprovechar estas propiedades basándose en la *Teoría de la Información Cuántica*. Entre las aplicaciones más prometedoras, se encuentran la *computación cuántica*, la *criptografía cuántica*, la *comunicación cuántica* y los *sensores cuánticos* [1].

En particular, un **sensor cuántico** es un sistema que permite acceder a escalas espaciales muy pequeñas, pero además exhibe propiedades cuánticas para utilizarlo con el propósito de medir una magnitud física. El esquema de medición genérico consiste de tres etapas: se inicializa el sensor en un estado conocido, se lo deja interactuar con la señal de interés, y se lee su estado final. Existen numerosos ejemplos de sensores cuánticos. Los espines nucleares de las moléculas dentro del cuerpo humano son utilizados en Resonancia Magnética Nuclear (RMN) como sensores para generar imágenes médicas de forma *no invasiva* [2]. Centros de vacancia-nitrógeno (*NV centers*), defectos electrónicos en diamante, han sido empleados o propuestos como magnetómetros sensibles [3], electrómetros [4], y termómetros [5]. Iones fríos atrapados pueden usarse como sensores sensibles del ruido de campo eléctrico cerca de superficies [6].

Los sensores cuánticos también son destacables por su potencialidad para superar los límites clásicos asociados a partículas no entrelazadas. Se ha demostrado tal mejora experimentalmente en la sensibilidad espectroscópica de iones fríos atrapados y entrelazados [7], en la sensibilidad de dispositivos magnetométricos debajo del límite del ruido shot [8], entre otros casos [1].

Los sensores cuánticos más sencillos son sistemas de dos niveles, cuyo estado es descripto como superposición de dos estados ortogonales. Frecuentemente se usan los estados de energía definida, denominando fundamental y excitado al de menor y mayor

energía respectivamente. De la dinámica de las transiciones entre estos estados puede extraerse información del ambiente con el que interactúa. Un ejemplo de tal sensor son los espines de momento magnético total $\frac{1}{2}$, que en presencia de un campo magnético su energía es afectada proporcionalmente a la intensidad del campo magnético. Por tanto, todo ambiente cuyo estado modifique el campo magnético puede ser sentido por ellos. La dinámica de estos sensores es fuertemente influenciada por el ambiente [9] y además depende fuertemente del control aplicado sobre ellos [10]. Recientemente se ha demostrado que una elección adecuada del esquema de control del sensor permite extraer mayor información del ambiente [11]. En particular, se ha demostrado que un decaimiento inducido por mediciones proyectivas provee la información máxima sobre el ambiente para sistemas débilmente interactuantes con su ambiente. Entre los varios esquemas que se pueden aplicar, este trabajo considera dos. El primero, que llamaremos *evolución coherente*, consiste en inicializar el sensor en un estado, dejarlo evolucionar libremente, y leer el estado final. El otro, que llamaremos *evolución proyectiva*, realiza mediciones proyectivas estroboscópicas cada un tiempo τ como herramienta de control cuántico, en contraste con la evolución libre del esquema anterior.

El efecto de las mediciones proyectivas en la dinámica de un sistema de dos niveles depende del tiempo τ . En la medida en que $\tau \rightarrow 0$, las mediciones evitan que el estado se aleje del valor al que es proyectado, ralentizando su evolución a lo largo del tiempo; este efecto es denominado el *Efecto Zenón Cuántico* (QZE) [12, 13]. Por otro lado, se demostró que usando valores adecuados de τ puede producir el efecto contrario, acelerando la evolución del sistema hacia su estado de equilibrio; este efecto es denominado el *Efecto Anti-Zenón Cuántico* (AZE) [14, 15]. Se ha demostrado que con el QZE y el AZE uno puede dirigir y controlar la transferencia de magnetización entre espines, amplificando en algunos casos significativamente la señal emitida por los espines [16]. En particular, esta manipulación ha permitido usar el efecto Zenón cuántico para determinar las interacciones entre espines en redes de muchos espines interactuantes [17]. Para ello se explotó que la evolución con QZE simplifica la dinámica de los espines que depende de varios parámetros, en una que sólo depende de un número reducido de ellos, permitiendo así una determinación de los acoples más directa. Sin embargo, no se demostró que sea la forma más eficiente de determinarlos. En este sentido, se observó que en ciertas circunstancias un espín sensor puede determinar su acople con su ambiente de forma más eficiente si la dinámica del sensor es guiada utilizando el QZE [11].

En este trabajo, consideramos generalizar estos resultados y, en particular, armar las bases teóricas para verificar en qué escenarios el QZE puede ser utilizado para realizar una estimación de parámetros más eficiente. En particular, para sentar las bases para demostrar que los resultados experimentales de la Ref. [17], en la práctica son los óptimos. Para avanzar en esta dirección, consideramos un modelo simple para

la estimación de parámetros que contiene los ingredientes básicos de una dinámica de muchos espines (Cap. 3). Una dinámica oscilatoria de intercambio de excitación entre un nivel y otro, y una componente que pone esta oscilación fuera de resonancia, es decir un “offset”. Esto corresponde a un sistema de dos niveles cuyo Hamiltoniano posee una componente transversal $\hbar\omega_x$ que induce transiciones entre ellos, y una componente longitudinal $\hbar\omega_z$ que introduce una separación de energía entre estos niveles, dando lugar a un Level Avoided Crossing (LAC).

Con este modelo, utilizando al sistema de dos niveles como sensor evaluamos la eficiencia en la estimación de acople entre los dos niveles, considerando la evolución coherente libre y la proyectiva para distintas relaciones entre las componentes transversal y longitudinal del Hamiltoniano. Utilizamos la información de Fisher para cuantificar la precisión esperable al estimar los parámetros para cada elección de control, y por lo tanto para proporcionar una métrica de la eficiencia en la estimación de parámetros. Encontramos que el método de control más conveniente es dependiente de la forma de ω y del tiempo disponible para el experimento, y cuantificamos los valores de los parámetros para los cuales conviene utilizar cada estrategia de control. Este sistema sencillo contiene una aplicación particular de los conceptos introducidos por el QZE para la estimación de parámetros que no ha sido explorada previamente, lo que llamamos *amplificación de información por el efecto Zenón cuántico*. Posee además los elementos conceptuales claves presentes en sistemas más complejos donde la estimación de parámetros podría ser relevante, como lo es para la estimación de los acoplos a primeros vecinos en sistemas de muchos espines [17].

Nuestra contribución original consiste en la cuantificación mediante la QFI de la calidad de la estimación para el protocolo de estimación proyectivo, demostrando que la información disponible es maximizada por el efecto Zenón cuántico (Sec. 3.3). Para tal fin trabajamos en términos del *vector polarización* en la esfera de Bloch, derivando la fórmula para la QFI en términos de éste (Ec. 2.44), facilitando una interpretación de los resultados dentro de un marco geométrico. Evaluamos la utilidad del desarrollo aplicándolo a distintos escenarios de estimación paramétrica en situaciones realistas (Secs. 4.1, 4.2, 4.3, y 4.4). Finalmente consideramos un mecanismo de realización de las mediciones proyectivas a través de la aplicación de una perturbación clásica estocástica provista por un ambiente, cuyo efecto es el de reducir las coherencias (Sec. 4.5). Demostramos que en el caso en el que la interacción es suficientemente fuerte, el efecto es equivalente al de una proyección ideal. También analizamos la posibilidad de utilizar proyecciones parciales como alternativa, tanto para la estimación de la componente transversal como para parámetros del ambiente. Encontramos que, en el caso de offset nulo, el efecto de la decoherencia es destructivo. Por otro lado, encontramos que los parámetros del ambiente pueden estimarse a partir del cambio de la velocidad de precesión del espín durante este protocolo, en circunstancias donde la derivada del

factor de atenuación respecto de dicho parámetro se anula.

Capítulo 2

Conceptos básicos

En este capítulo describimos las herramientas básicas utilizadas en este trabajo. La Sec. 2.1 introduce el formalismo de la matriz densidad. Mientras que el formalismo de la ecuación de Schrödinger sólo permite representar estados cuánticos puros, el de la matriz densidad permite incorporar los efectos de decoherencia introducidos por las interacciones con el ambiente o las mediciones proyectivas. Estas últimas son el recurso empleado en este trabajo para controlar la evolución cuántica del sistema. La Sec. 2.2 introduce el formalismo de la estimación de parámetros, permitiendo cuantificar mediante el uso de la Información de Fisher Clásica y la Información de Fisher Cuántica la precisión máxima conseguible a través de mediciones sobre sistemas cuánticos cuyos resultados están definidos a partir de una distribución de probabilidad.

2.1. Formalismo de la matriz densidad

El formalismo de la función de onda permite evaluar la evolución de sistemas cuánticos puros. Cuando la interacción introduce efectos de decoherencia, donde el sistema deja de estar en una superposición cuántica de estados y pasa a conformar parte de un ensemble de estados cuánticos, es necesario describir el sistema a través de la matriz densidad. Este formalismo permite además incorporar el efecto de mediciones proyectivas, que son utilizadas en el trabajo como mecanismo de control del sistema, y describir sistemas cuánticos abiertos, donde el proceso de decoherencia toma lugar.

La dinámica de un estado $|\psi\rangle$ de un sistema, en función del tiempo t , está gobernada por la **ecuación de Schrödinger**

$$i\hbar d_t |\psi\rangle = H |\psi\rangle, \quad (2.1)$$

donde d_t es la derivada total respecto de t , H es el **operador Hamiltoniano** y \hbar la **constante de Planck**.

La función de onda $|\psi\rangle$ representa un **estado puro**, correspondiente a una instancia individual del sistema en consideración. La ecuación Ec. 2.1 implica que el estado del sistema $|\psi\rangle$ en un tiempo arbitrario t queda unívocamente determinado por el estado en un tiempo t_0 . El **operador evolución** $U(t, t_0)$ determina esta evolución temporal de la forma

$$|\psi\rangle(t) = U(t, t_0) |\psi\rangle(t_0). \quad (2.2)$$

Para un Hamiltoniano independiente del tiempo, el operador evolución toma la forma $U(t, t_0) = e^{-iH(t-t_0)/\hbar}$.

Dado un **observable** O , la probabilidad de obtener el autovalor o de O tras una medición es $|\langle o|\psi\rangle|^2$. El valor medio después de repetidas mediciones *sobre el mismo estado* $|\psi_\alpha\rangle$ está dado por $|\langle \psi|O|\psi\rangle|$. Bajo la **interpretación de Copenhague** [18], el estado del sistema se proyectará al autoespacio de O cuyo autovalor coincide con el valor obtenido en el experimento.

Consideremos ahora un ensamble de sistemas sujetos al mismo Hamiltoniano. En un instante t_0 cada sistema se encuentra en un estado puro $|\psi_\beta(t_0)\rangle$, y p_β es la fracción de sistemas en cada estado β . El estado $|\psi_\beta(t)\rangle$ de cada uno de estos sistemas evolucionará de acuerdo a la ecuación de Schrödinger. La medición de un observable O sobre un elemento *tomado al azar* del ensamble dará o con una probabilidad $\sum_\beta p_\beta |\langle o|\psi_\beta(t)\rangle|^2$.

La dinámica del sistema en estas condiciones está determinada por la **matriz densidad** ρ , definida como

$$\rho = \sum_\beta p_\beta |\psi_\beta\rangle\langle\psi_\beta|. \quad (2.3)$$

La probabilidad $P(o)$ de obtener el valor o tras la medición de O , y el valor de expectación $\langle O \rangle = \sum_o oP(o)$, están dados por

$$P(o) = \langle o|\rho|o\rangle \quad (2.4)$$

$$\langle O \rangle = \text{Tr}(\rho O), \quad (2.5)$$

respectivamente, donde Tr representa la traza.

Si existe un estado puro $|\psi\rangle$ tal que $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$, la matriz densidad representa un ensamble donde todos los elementos son idénticos y evolucionan según Ec. 2.1, y representa un estado puro. Caso contrario, su evolución temporal está dada por

$$\rho(t) = U(t, t_0)\rho(t_0)U(t_0, t). \quad (2.6)$$

Efectuada una medición proyectiva de O a tiempo t sobre el ensamble, cada elemento se encontrará en el estado $|o\rangle$ con probabilidad $P(o)$, de modo que la matriz densidad tomará la forma

$$[\rho(t^+)]_{\mathcal{I}} = \text{diag}([\rho(t^-)]_{\mathcal{I}}), \quad (2.7)$$

donde \mathcal{I} es una base de autovectores de O , $[\Lambda]_{\mathcal{I}}$ es la matriz asociada al operador Λ en la base \mathcal{I} , y $\text{diag}(M)$ es la matriz diagonal cuyos elementos diagonales coinciden con los de M .

En el caso de un sistema de dos niveles, cualquier matriz densidad puede ser descrita en términos de lo que denominaremos **vector polarización** \mathbf{p} dado por

$$\rho = \frac{1}{2} [\mathbf{I} + \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}], \quad \mathbf{p} := |\mathbf{p}| \leq 1 \quad (2.8)$$

donde $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ es el vector de operadores de Pauli. El efecto de la medición proyectiva ideal es, en estos términos,

$$\mathbf{p}(t^+) = (\mathbf{p}(t^-) \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}, \quad (2.9)$$

donde \mathbf{n} es el versor tal que $O = a + b\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}$, para algún par de números reales a y b . Es decir, una proyección vectorial a lo largo del eje \mathbf{n} .

2.2. Estimación de parámetros

Esta sección introduce algunos conceptos elementales de la estimación de parámetros en el contexto de un sistema cuántico. Para las definiciones pertinentes a las distribuciones de probabilidad nos basamos en la Ref. [19], mientras que los conceptos de distancia estadística e información de Fisher resumen las ideas y el desarrollo de las referencias [20] y [21]. Estas últimas son particularmente concisas y claras, por lo que su lectura es recomendada.

La estimación de parámetros concierne a la tarea de estimar una propiedad o cantidad física, denominada parámetro, a través de medir un sistema cuyo estado dependa de éste. Por lo general, cada valor del parámetro no determina cuál será el resultado de la medición, sino la probabilidad de obtener cada resultado. La tarea de distinguir entre dos valores cercanos del parámetro resulta entonces equivalente a distinguir entre

las dos distribuciones de probabilidad que éstos determinan. Esto último motiva la definición de una métrica sobre el espacio de las distribuciones de probabilidad.

Como la distribución de probabilidad no es conocida completamente sino a través de un muestreo, cualquier *estimador* va a estar caracterizado por un error estadístico. El mínimo error posible es cuantificado por la *Información de Fisher*.

Dentro del marco de la mecánica cuántica, el parámetro define el estado del sistema. Cada elección de observable define el conjunto de resultados sobre el cual se obtendrán las mediciones, y por consiguiente el error estadístico esperable. En este contexto, se define la *distancia estadística cuántica* y la *Información de Fisher cuántica* como la distancia estadística e Información de Fisher asociadas al observable que ofrece mayor discernibilidad entre los estados cuánticos a diferenciar.

2.2.1. Distancia estadística entre distribuciones de probabilidad

Dado un experimento estocástico con $n \in [1, \aleph_0]$ posibles resultados numerados, una **distribución de probabilidad** es un conjunto ordenado $\mathbf{p} = (p_i) \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$p_i \geq 0 \quad \forall i, \quad (2.10)$$

$$\sum_i p_i = 1. \quad (2.11)$$

El conjunto P de las distribuciones de probabilidad es una superficie embebida en R^n de dimensión $n - 1$ denominada **simplex**, y admite una métrica denominada **distancia estadística** motivada por el concepto de distinguibilidad estadística [20]. Veremos en la Subsec. 2.2.4 que esta métrica está directamente relacionada con la precisión estadística en la estimación de parámetros.

Consideremos una moneda de sesgo ξ , es decir que la distribución de probabilidad (p_1, p_2) de ver la cara i tras ser arrojada es $(\xi, 1 - \xi)$. Dado que $p_1 = \xi$ parametriza completamente la distribución de probabilidad, hablaremos de ξ y su distribución asociada indistintamente. Tras N lanzamientos, se habrán obtenido N_1 y N_2 veces la cara 1 y 2 respectivamente. El valor de ξ puede ser estimado como la fracción $\xi^* = N_1/N$ de veces que se obtuvo la cara 1. Este valor es una variable aleatoria, y la probabilidad $P(\xi^*)$ de cada estimación sigue la distribución binomial

$$P(\xi^*) = \frac{N!}{N_1!N_2!} \xi^{N_1} (1 - \xi)^{N_2}. \quad (2.12)$$

Se toma como incerteza del valor estimado ξ^* respecto del valor real la desviación estándar [20], $\sigma = \sqrt{\xi(1 - \xi)/N}$, y su región de incerteza es $(\xi - \sigma, \xi + \sigma)$. Los valores en la región de incerteza corresponden al 60 % mas probable de los resultados.

Ahora, dos monedas de sesgos ξ_1 y ξ_2 pueden ser distinguidas determinando su sesgo mediante el esquema anterior, arrojando N veces cada una. Se dice que los dos sesgos son **distinguibles en N realizaciones** si y sólo si sus regiones de incerteza no intersecan. Es decir, $|\xi_1 - \xi_2| \geq \sigma_1 + \sigma_2$, donde σ_i es la desviación estándar del valor estimado de ξ_i .

Para N suficientemente grande (y $\xi_1 \neq \xi_2$), puede elegirse un conjunto de distribuciones entre estas dos tal que todas ellas sean mutuamente distinguibles en N realizaciones, como se muestra en la Fig. 2.1. Como la incerteza escala como $1/\sqrt{N}$, el número máximo de tales distribuciones escala como \sqrt{N} .

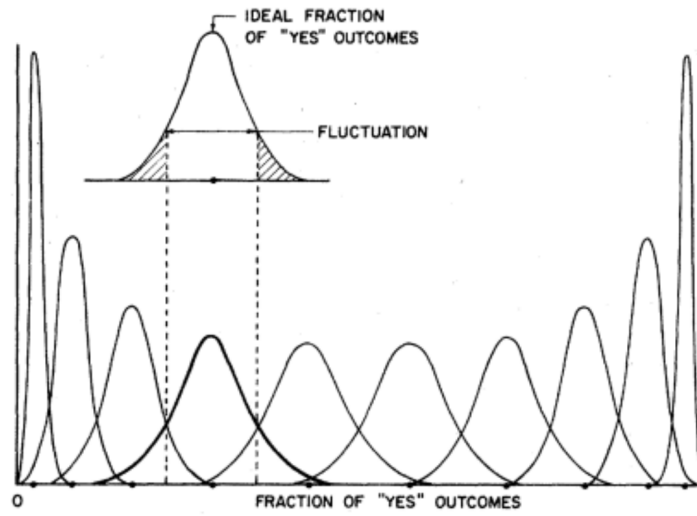


Figura 2.1: Distribuciones de probabilidad (puntos sobre el eje abscisas) equidistantes. Las curvas $P(\hat{p})$ muestran la distribución de probabilidad P de estimar el valor real de la distribución de probabilidad con el valor \hat{p} tras una cantidad finita de mediciones. Los intervalos de indistinguibilidad están determinados por la condición $P(\hat{p}) > e^{-\frac{1}{2}}$. Figura tomada de Ref. [20].

La *distancia estadística* se define entonces como¹

$$d(\xi_1, \xi_2) = 2 \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{N}(N)}{\sqrt{N}}, \quad (2.13)$$

donde $\mathcal{N}(N)$ es la máxima cantidad de distribuciones mutuamente distinguibles que se pueden acomodar entre ξ_1 y ξ_2 . Este límite existe, y toma la forma [20]

$$2 \arccos \left(\xi_1^{1/2} \xi_2^{1/2} + (1 - \xi_1)^{1/2} (1 - \xi_2)^{1/2} \right). \quad (2.14)$$

Este esquema de estimación se generaliza inmediatamente a un espacio de probabilidades para n resultados. La distribución de probabilidad es ahora $\mathbf{p} = (p_i)$, y puede ser estimada tras N realizaciones como $\mathbf{p}^* = (p_i^*) = (N_i/N)$, donde N_i es la cantidad

¹El factor 2 fuera del límite no está presente en la definición de Wootters [20], pero sí en la empleada por Braunstein [21]. Braunstein lo aborda desde la perspectiva de estimación de parámetros, definiendo la distancia estadística en términos de la varianza estadística de un parámetro a estimar.

de veces que se obtuvo el resultado i -ésimo. La probabilidad de que el valor estimado sea \mathbf{p}^* es la distribución multinomial

$$P(\mathbf{p}^*) = \frac{N!}{N_1!N_2!\dots N_n!} p_1^{N_1} p_2^{N_2} \dots p_n^{N_n}, \quad (2.15)$$

$$\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi \prod_i \left(\frac{p_i}{N}\right)^2}} \exp \left[-\frac{n}{2} \sum_i \frac{(p_i^* - p_i)^2}{p_i} \right] \quad (N \text{ grande}). \quad (2.16)$$

Se define la región de distinguibilidad tras N realizaciones de \mathbf{p} como el conjunto de distribuciones de probabilidad \mathbf{p}^* tales que el valor absoluto del exponente en Ec. 2.16 sea mayor que $\frac{1}{2}$.

Dada una curva diferenciable $\mathbf{p} : [0, 1] \rightarrow P$ en el conjunto de distribuciones de probabilidad, como muestra la Fig. 2.2, se define su *longitud estadística*, análogo al caso anterior, como [20]

$$s = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{N}(N)}{\sqrt{N}} = \int_0^1 \left\{ \sum_i \frac{1}{p_i(t)} \left[\frac{dp_i(t)}{dt} \right]^2 \right\}^{1/2} dt, \quad (2.17)$$

donde $\mathcal{N}(N)$ es la máxima cantidad de distribuciones mutuamente distinguibles a lo largo de la curva.

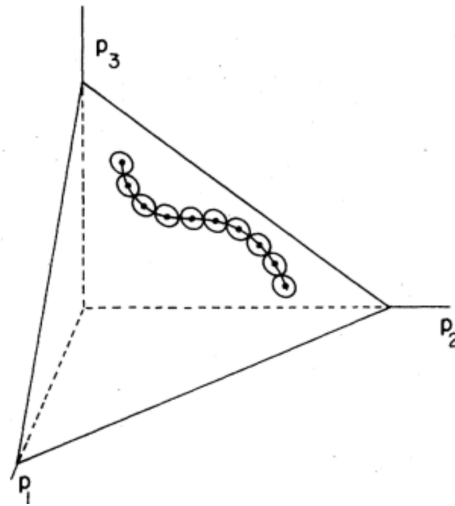


Figura 2.2: Curva paramétrica sobre el conjunto de distribuciones de probabilidad. Las regiones de distinguibilidad, como en la Fig. 2.1, es la región sobre la cual la probabilidad de estimar \mathbf{p} como $\hat{\mathbf{p}}$ es superior a $e^{-\frac{1}{2}}$. Figura tomada de Ref. [20].

Tras el cambio de variables $x_i = p_i^{1/2}$, esta distancia toma la forma de la distancia euclídea, $ds^2 = \sum_i dx_i^2$. La condición $p_i \geq 0$ es satisfecha por definición, y la condición $\sum_i p_i = 1$ se torna $\sum_i x_i^2 = 1$, por lo que la longitud de la curva en las nuevas variables es simplemente la longitud euclídea de ésta, restringida a la superficie de una esfera.

Dadas dos distribuciones de probabilidad $\mathbf{p}^{(1)} = (p_i^{(1)})$ y $\mathbf{p}^{(2)} = (p_i^{(2)})$, se define su

distancia estadística como la mínima longitud estadística sobre todas las trayectorias diferenciables que las conectan. Considerando la observación anterior, esta distancia toma el valor [20]

$$d(\mathbf{p}^{(1)}, \mathbf{p}^{(2)}) = 2 \operatorname{acos} \left(\sum_i x_i^{(1)} x_i^{(2)} \right) = 2 \operatorname{acos} \left(\sum_i \left(p_i^{(1)} \right)^{1/2} \left(p_i^{(2)} \right)^{1/2} \right), \quad (2.18)$$

donde $x_i^{(j)} = \left(p_i^{(j)} \right)^{1/2}$.

De la Ec. 2.17 puede identificarse la distancia estadística tras un desplazamiento infinitesimal de \mathbf{p} a $\mathbf{p} + d\mathbf{p}$ dada por

$$ds^2 = \sum_i \frac{(dp_i)^2}{p_i} = \sum_i p_i (d \log p_i)^2 = \langle (d \log p_i)^2 \rangle, \quad (2.19)$$

donde $\langle f_i \rangle = \sum_i p_i f_i$.

La misma puede ser pensada como la distancia euclídea, donde el término asociado al desplazamiento i -ésimo es pesado por el factor $1/p_i$. Fijado un vector desplazamiento $d\mathbf{p}$, ésta distancia toma su mínimo cerca del centro ($p_i \approx 1/2 \forall i$) y tiende a infinito en la medida en la que consideramos puntos más cercanos a los bordes ($\exists i : p_i \approx 0 \wedge dp_i \neq 0$).

Es particularmente ilustrativo el caso de distribuciones de probabilidad bidimensionales, de la forma (p_1, p_2) . Definiendo $\Delta p = p_1 - p_2$ y considerando que $p_1 + p_2 = 1$, se tienen los siguientes resultados:

$$p_1 = \frac{1 + \Delta p}{2}, \quad (2.20)$$

$$p_2 = \frac{1 - \Delta p}{2}, \quad (2.21)$$

$$dp_1 = -dp_2. \quad (2.22)$$

La distancia estadística resulta entonces

$$ds^2 = \frac{dp_1^2}{p_1} + \frac{dp_2^2}{p_2} = \frac{dp_1^2}{1 - \Delta p^2}. \quad (2.23)$$

El factor $1/(1 - \Delta p^2)$ es mínimo en el centro ($\Delta p = 0$) y tiende a infinito en los bordes ($|\Delta p| \rightarrow 1$).

2.2.2. Distancia estadística entre estados cuánticos puros

Dado que los estados cuánticos codifican información probabilística, el mismo concepto de distancia estadística puede ser definido entre dos estados cuánticos. Para obtener una distribución de probabilidad asociada a un estado cuántico, es necesario

definir un dispositivo experimental. Cada dispositivo experimental estará caracterizado por el conjunto ortogonal de estados $\mathcal{O} = \{|\varphi_i\rangle\}$ que pueden ser identificados tras el experimento. Como existe una correspondencia uno a uno entre un dispositivo experimental y \mathcal{O} , nos referiremos a tal dispositivo como \mathcal{O} .

Dado un dispositivo experimental \mathcal{O} , y dados dos estados cuánticos $|\psi_1\rangle$ y $|\psi_2\rangle$, éstos pueden ser diferenciados a través de las distribuciones de probabilidad $p_i^{(j)} = |\langle\varphi_i|\psi_j\rangle|^2$ de encontrar al estado $|\psi_j\rangle$ en el estado $|\varphi_i\rangle$.

La distancia estadística entre los estados $|\psi_1\rangle$ y $|\psi_2\rangle$ medidos con el dispositivo \mathcal{O} se obtiene de la Ec. 2.18,

$$d_{\mathcal{O}}(\psi_1, \psi_2) = 2 \operatorname{acos} \left(\sum_i \left(p_i^{(1)} \right)^{1/2} \left(p_i^{(2)} \right)^{1/2} \right) \quad (2.24)$$

$$= 2 \operatorname{acos} \left(\sum_i |\langle\psi_1|\varphi_i\rangle \langle\varphi_i|\psi_2\rangle| \right). \quad (2.25)$$

Dos estados que no son indistinguibles con un dispositivo experimental podrían serlo con otro. Para eliminar esta dependencia, la distancia estadística d entre dos estados cuánticos se define entonces como el máximo de $d_{\mathcal{O}}$ sobre todos los posibles dispositivos experimentales \mathcal{O} . Este máximo se alcanza [20] cuando uno de los vectores de \mathcal{O} coincide con $|\psi_1\rangle$ o $|\psi_2\rangle$, dando

$$d(\psi_1, \psi_2) = 2 \operatorname{acos} (|\langle\psi_1|\psi_2\rangle|). \quad (2.26)$$

La distancia estadística cuadrada asociada a una variación infinitesimal desde $|\psi\rangle$ a $|\psi\rangle + |d\psi\rangle$ puede obtenerse de la Ec. 2.19, considerando que el máximo de $d_{\mathcal{O}}$ es alcanzado si $|\psi\rangle \in \mathcal{O}$, en cuyo caso²

$$ds^2 = |dp_{\psi}|^2 = ||\langle\psi| [|\psi\rangle + |d\psi\rangle]|^2 - |\langle\psi|\psi\rangle|^2 \quad (2.27)$$

$$= \langle\psi| [|\psi\rangle\langle d\psi| + |d\psi\rangle\langle\psi| + |d\psi\rangle\langle d\psi|] |\psi\rangle \quad (2.28)$$

$$= \langle dL^2 \rangle, \quad (2.29)$$

donde $dL^2 = |\psi\rangle\langle d\psi| + |d\psi\rangle\langle\psi| + |d\psi\rangle\langle d\psi|$.

2.2.3. Distancia estadística entre estados cuánticos mixtos

En el caso más general de estimación de parámetros dentro de la cuántica se describe el estado del sistema mediante la matriz densidad $\rho = \sum_{\beta} p_{\beta} |\psi_{\beta}\rangle\langle\psi_{\beta}|$. Las mediciones son descritas por las medidas “Positive operator-valued measurement” (POVMs) [21].

²Dado que $|\psi\rangle$ es tanto una de las salidas como el estado inicial, $p_{\psi} = 1$, con lo que toda otra posibilidad tiene probabilidad 0. Se demuestra en la Ref. [21] que los términos singulares se anulan

Estas medidas están descritas por un conjunto de operadores Hermíticos no negativos E_ξ , que satisfacen

$$\int d\xi E_\xi = \mathbb{I}, \quad (2.30)$$

donde \mathbb{I} representa el operador identidad sobre el espacio de Hilbert, y ξ etiqueta el resultado de cada medición. El conjunto de resultados posibles puede ser tanto discreto como continuo. En este contexto, la probabilidad del resultado ξ está dada por

$$p_\xi = \text{Tr}(\rho E_\xi) = \langle E_\xi \rangle. \quad (2.31)$$

Dado un conjunto E de POVMs, la distancia estadística (Ec. 2.19) toma la forma

$$ds_E^2 = \int d\xi \frac{(\text{Tr}(d\rho E_\xi))^2}{\text{Tr}(\rho E_\xi)}. \quad (2.32)$$

Para encontrar el máximo respecto de las POVMs, se hace uso del operador **derivada logarítmica simétrica** dL , definido por la ecuación

$$d\rho = \frac{1}{2}(\rho dL + dL\rho). \quad (2.33)$$

Esto es, dL es $R^{-1}(d\rho)$, donde R^{-1} es la inversa del superoperador R definido por $R(O) = \frac{1}{2}(\rho O + O\rho)$. Ésta inversa existe para todo valor de ρ , tomando la forma [21]

$$R^{-1}(O) = \sum_{j,k: p_j+p_k \neq 0} \frac{2}{p_j + p_k} |j\rangle \langle j|O|k\rangle \langle k|, \quad (2.34)$$

donde $|j\rangle$ representa el autovector de autovalor p_j de ρ .

El supremo para ds_E^2 es $\langle dL^2 \rangle$, que puede ser alcanzado eligiendo a E como un conjunto de proyectores unidimensionales en un conjunto completo de autoestados ortonormales de dL [21]. Esto permite finalmente definir la distancia estadística asociada a una traslación infinitesimal en el espacio de las matrices densidad como

$$ds^2 = \langle dL^2 \rangle. \quad (2.35)$$

Considerando la Ec. 2.34, la forma explícita de la Ec. 2.35 es

$$\langle dL^2 \rangle = \sum_{i: p_i \neq 0} \frac{dp_i^2}{p_i} + 2 \sum_{j \neq k: p_j+p_k \neq 0} \frac{(p_j - p_k)^2}{p_j + p_k} |\langle p_j | dp_k \rangle|^2, \quad (2.36)$$

donde $|p_i\rangle$ es el autovector de ρ con autovalor p_i , y $|\tilde{p}_i\rangle = |p_i\rangle + |dp_i\rangle$ los autovectores

de $\tilde{\rho} = \rho + d\rho$ con autovalor $\tilde{p}_i = p_i + dp_i$.

2.2.4. Información de Fisher de un parámetro

Consideremos la tarea de estimar un parámetro x , a través de los resultados ξ de un experimento, regidos por la distribución de probabilidad $P_x(\xi)$. Las tareas de estimar x y la de estimar P_x precisamente son equivalentes, como ilustra la Fig. 2.3. Tras N mediciones de este proceso, con resultados $\boldsymbol{\xi} = (\xi_i)$, se estima el parámetro x como $x_{\text{est}}(\boldsymbol{\xi})$. La desviación de esta estimación respecto del valor verdadero x está dada por

$$\delta x = \frac{x_{\text{est}}}{\left| d_x \langle x_{\text{est}} \rangle_{\boldsymbol{\xi}} \right|} - x, \quad (2.37)$$

donde $\langle f(\boldsymbol{\xi}) \rangle_{\boldsymbol{\xi}} = \int_{\mathbb{R}^n} d\xi P_x(\boldsymbol{\xi}) f(\boldsymbol{\xi})$, y la derivada $d_x \langle x_{\text{est}} \rangle$ normaliza las “unidades” locales del estimador x_{est} [21]. La varianza cuadrática media $\langle \delta x^2 \rangle$ cuantifica el error esperado respecto del valor verdadero debido a las fluctuaciones estadísticas. La misma se encuentra limitada por la **cota de Cramér-Rao** [21],

$$\langle (\delta x)^2 \rangle \geq \frac{1}{NF(x)} + \langle \delta x \rangle^2 \geq \frac{1}{NF(x)}, \quad (2.38)$$

donde la **información de Fisher** asociada al parámetro x está definida como

$$F(x) = \int d\xi \frac{1}{P_x(\xi)} (\partial_x P_x(\xi))^2 \quad (2.39)$$

$$= \int d\xi P_x(\xi) (\partial_x \log(P_x(\xi)))^2 = \langle (\partial_x \log P_x)^2 \rangle. \quad (2.40)$$

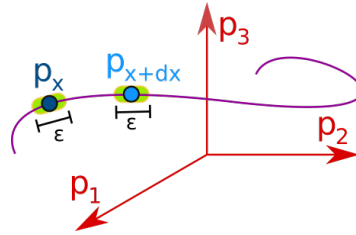


Figura 2.3: Curva sobre el espacio de las distribuciones de probabilidad, parametrizada por el parámetro x . Los puntos \mathbf{p}_x y \mathbf{p}_{x+dx} corresponden a las distribuciones de probabilidad asociadas a x y $x+dx$. La distinguibilidad de x respecto de $x+dx$ depende del error ε en las distribuciones de probabilidad.

Los estimadores para los cuales $\langle \delta x \rangle = 0$ se denominan no sesgados. El teorema de Fisher establece que, para N grande, la estimación de máxima verosimilitud³ es

³El estimador \hat{x} de máxima verosimilitud del parámetro x está definido como $\arg \max_x P(r|x)$, donde $P(r|x)$ es la probabilidad de los valores medidos fijado el valor del parámetro x .

asintóticamente no sesgada y consigue alcanzar la cota de Cramér-Rao.

El término de la derecha de la Ec. 2.40 se identifica como el cociente entre la distancia estadística cuadrática ds^2 asociada al desplazamiento de P_x a P_{x+dx} y el desplazamiento cuadrático dx^2 del parámetro. Esto es,

$$ds^2 = F(x)dx^2. \quad (2.41)$$

Cuando el experimento concierne un sistema cuántico, el esquema anterior puede efectuarse para cada elección de medición. Denominaremos ds_C^2 a la distancia estadística dependiente de la medición. En este caso, F es denominada la **Información de Fisher Clásica** (CFI). Sin embargo, como vimos en la Subsec. 2.2.3, existe una medición óptima que maximiza ds_C^2 . La información de Fisher asociada a tal medición es denominada la **Información de Fisher Cuántica** (QFI), denotada por H , y que satisface $ds^2 = H(x)dx^2$ donde ds^2 es el máximo sobre todas las POVMs de la distancia estadística. La misma se puede obtener de la Ec. 2.36 como

$$\langle (\partial_x L)^2 \rangle = \sum_{i:p_i \neq 0} \frac{(\partial_x p_i)^2}{p_i} + 2 \sum_{j \neq k: p_j + p_k \neq 0} \frac{(p_j - p_k)^2}{p_j + p_k} |\langle p_j | \partial_x | p_k \rangle|^2. \quad (2.42)$$

La **cota de Cramér-Rao cuántica** es la cota para la desviación estadística asociada a la QFI, y toma la forma

$$\langle (\delta x)^2 \rangle \geq \frac{1}{NH(x)}. \quad (2.43)$$

En el caso de sistemas de dos niveles, y en términos del vector polarización \mathbf{p} introducido anteriormente, la QFI toma la forma sencilla

$$\langle (\partial_x L)^2 \rangle = \frac{1}{1 - \mathbf{p}^2} (\partial_x \mathbf{p}_r)^2 + (\partial_x \mathbf{p}_t)^2, \quad (2.44)$$

donde $\partial_x \mathbf{p}_r$ y $\partial_x \mathbf{p}_t$ representan la componente radial y tangencial de $\partial_x \mathbf{p}$ respectivamente.

Capítulo 3

Estimación del acople en un sistema de dos niveles

Consideraremos un sistema de dos niveles descrito por el Hamiltoniano general independiente del tiempo

$$H = \frac{1}{2}\hbar\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (3.1)$$

$$\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z), \quad (3.2)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z) \quad (3.3)$$

$$= (|\downarrow\rangle\langle\uparrow| + |\uparrow\rangle\langle\downarrow|, i|\downarrow\rangle\langle\uparrow| - i|\uparrow\rangle\langle\downarrow|, |\uparrow\rangle\langle\uparrow| - |\downarrow\rangle\langle\downarrow|). \quad (3.4)$$

El operador de espín $\frac{1}{2}\hbar\boldsymbol{\sigma}$ está definido en término de las matrices de Pauli $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$. El término ω_z representa el desdoblamiento natural en la energía de los niveles $|\uparrow\rangle$ y $|\downarrow\rangle$. Los términos ω_x y ω_y representan el acople entre estos dos niveles. Sin pérdida de generalidad, consideraremos $\omega_y = 0$. Este Hamiltoniano provee la forma universal asociada a un sistema de dos niveles acoplados, que da lugar a un Level Avoided Crossing (LAC), consecuencia del acople ω_x en función de la diferencia de energía ω_z que llamaremos offset. Cuando $\omega_z = 0$, el sistema se encuentra en resonancia, y un intercambio de población del estado $|\uparrow\rangle$ al $|\downarrow\rangle$ puede darse de forma completa, y viceversa, como mostraremos más adelante. Al aumentar el offset ω_z , decrementa la probabilidad de transición entre los dos estados bajo evolución coherente. En este capítulo estudiaremos las condiciones óptimas para estimar el acople ω_x entre los dos niveles, donde mostraremos que la evolución coherente es óptima cuando el sistema está cercano a la condición de resonancia, pero esta información se degrada al aumentar ω_z . Mostraremos que en este último caso, la información puede ser incrementada mediante la aplicación de mediciones proyectivas superando ampliamente la obtenida bajo evolución coherente.

3.1. Estimación a partir de la evolución coherente libre del sistema

Dado un estado $\rho = \frac{1}{2} [\mathbf{I} + \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}]$, el vector polarización \mathbf{p} evolucionará según

$$d_t \mathbf{p} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}. \quad (3.5)$$

Es decir, precesará con velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$. Dado que este movimiento preserva la norma \mathbf{p} , $\partial_{\omega_x} \mathbf{p}_r = \mathbf{0}$, por lo que la QFI tomará la forma

$$H(\omega_x) = (\partial_{\omega_x} \mathbf{p})^2. \quad (3.6)$$

Es decir, puede ser interpretada a través de

$$(d\mathbf{p})^2 = H(\omega_x) d\omega_x^2. \quad (3.7)$$

Es decir, la QFI asociada a ω_x puede obtenerse considerando una variación infinitesimal $d\omega_x$ de ω_x , y observando el desplazamiento $d\mathbf{p}$ que esta variación induce sobre el vector polarización \mathbf{p} , como el cociente entre el cuadrado de estas variaciones, utilizando la distancia euclídea.

En todos los casos consideraremos como estado inicial

$$\mathbf{p} = p_0 \mathbf{z}, \quad (3.8)$$

correspondiente a la matriz densidad

$$\frac{1}{2} [1 + p_0] |\uparrow\rangle\langle\uparrow| + \frac{1}{2} [1 - p_0] |\downarrow\rangle\langle\downarrow|. \quad (3.9)$$

Es decir, un ensamble clásico donde la fracción $\frac{1}{2}(1 + p_0)$ de elementos se encuentra en el estado $|\uparrow\rangle$ y $\frac{1}{2}(1 - p_0)$ en el estado $|\downarrow\rangle$.

3.1.1. Evolución y estimación del término transversal

Consideremos primero $\boldsymbol{\omega} = \omega_x \mathbf{x}$, cuya intensidad ω_x buscamos estimar, haciendo uso del sistema de dos niveles como sensor. Dada la condición inicial (Ec. 3.8), la dinámica consistirá de una rotación del vector polarización \mathbf{p} , con velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ alrededor del eje \mathbf{x} , como muestra la Fig. 3.1. El ángulo θ respecto del eje \mathbf{z} tomará el valor $\theta = \omega_x t$. Conociendo \mathbf{p} en un instante de tiempo t , ω_x puede ser estimado con $(\theta + k2\pi)/t$ ($k \in \mathbb{N}_0$), donde múltiplos de $2\pi/t$ son indistinguibles *si sólo se conoce*

el valor de \mathbf{p} en un único instante de tiempo¹. En circunstancias prácticas, es posible estimar primero la región $[\omega_0, \omega_0 + 2\pi]$ donde se debe encontrar el valor de ω_x , por ejemplo midiendo \mathbf{p} en distintos tiempos y reconstruyendo su trayectoria. Así, pequeñas variaciones $d\omega_x \mathbf{x}$ en $\boldsymbol{\omega}$ dentro de ese rango son diferenciables, a partir de la diferencia $d\theta = d\omega_x t$ en θ .

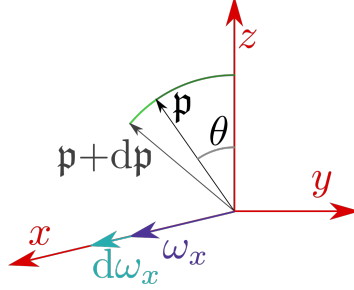


Figura 3.1: Esquema de la precesión de los vectores polarización \mathbf{p} y $\mathbf{p} + d\mathbf{p}$, con velocidad angular $\omega_x \mathbf{x}$ y $(\omega_x + d\omega_x) \mathbf{x}$. La diferencia $d\omega_x$ introduce una diferencia en la velocidad angular total precesión

La QFI puede obtenerse inmediatamente, considerando que dos trayectorias que difieren en su velocidad angular por $d\omega_x$ distarán en $\mathbf{p}_0 d\theta = \mathbf{p}_0 t d\omega_x$, de modo que la QFI toma la forma

$$H(\omega_x) = \mathbf{p}_0^2 t^2. \quad (3.10)$$

En la práctica, \mathbf{p} es accesible sólo a través de mediciones proyectivas sobre direcciones de $\boldsymbol{\sigma}$. Supongamos que se sensa el estado del sistema proyectando sobre los autoestados $\mathcal{S} = \{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$ de σ_z . Dada una velocidad angular ω_x , las probabilidades p^\uparrow y p^\downarrow en función del tiempo de encontrar al sistema en el estado $|\uparrow\rangle$ y $|\downarrow\rangle$ respectivamente, están dadas por la Ec. ??,

$$p^\uparrow(t) = \frac{1 + \mathbf{p}_0 \cos(\omega_x t)}{2}, \quad (3.11)$$

$$p^\downarrow(t) = \frac{1 - \mathbf{p}_0 \cos(\omega_x t)}{2}. \quad (3.12)$$

Como $p^\downarrow = 1 - p^\uparrow$, en la siguiente discusión hablaremos únicamente de p^\uparrow , considerando que las propiedades de las distribuciones de probabilidad son simétricas frente al intercambio $p^\uparrow \leftrightarrow p^\downarrow$.

El valor de ω_x puede ser estimado de la siguiente forma: Se inicializa el sistema en ρ_0 , se lo deja evolucionar un tiempo t y se realiza la medición proyectiva sobre \mathcal{S} , obteniendo $|\uparrow\rangle$ o $|\downarrow\rangle$ con probabilidad $p^\uparrow(t)$ y $p^\downarrow(t)$ respectivamente. Reiterando este procedimiento N veces, se define un estimador $\hat{\omega}_x(\mathbf{s})$ de ω_x , donde $\mathbf{s} \in \{\uparrow, \downarrow\}^N$ es el

¹En la práctica, en muchos casos, las mediciones son no invasivas, por lo que se puede conocer θ a lo largo del tiempo, y no sólo en un instante

vector tal que $s_i \in \{\uparrow, \downarrow\}$ es el i -ésimo resultado. Al valor obtenido $\hat{\omega}_x(\mathbf{s})$ tras este proceso de estimación se lo denominará el valor medido de ω_x .

El error estadístico en la estimación de ω_x , cuantificado por la varianza $\sigma_{\omega_x}^2$ de los valores medidos, está acotado por la cota de Cramér-Rao (Ec. 2.38),

$$\sigma_{\omega_x}^2 \geq \frac{1}{N F(\omega_x)} \geq \frac{1}{N H(\omega_x)}, \quad (3.13)$$

donde $F(\omega_x)$ y $H(\omega_x)$ son la CFI y QFI asociadas a ω_x , y las desigualdades primera y segunda representan la versión clásica y cuántica de esta cota respectivamente. Es importante destacar que la *estimación de máxima verosimilitud* (Ec. A.52 del Ap. A.4), se aproxima asintóticamente a la cota clásica, por lo que el término a la derecha de la desigualdad representa efectivamente el error experimental en tal circunstancia. La CFI, conceptualmente, está definida por la ecuación

$$ds^2 = F(\omega_x) d\omega_x^2, \quad (3.14)$$

donde ds^2 es la distancia estadística cuadrática definida en la Ec. 2.19 entre las distribuciones de probabilidad $(p^\uparrow(t), p^\downarrow(t))$ asociadas a valores de ω_x que difieren en $d\omega_x$.

La Fig. 3.2 muestra la probabilidad p^\uparrow en función del tiempo para dos valores ligeramente distintos del campo magnético. La variación $d\omega_x$ en la frecuencia angular introduce la diferencia

$$dp^\uparrow(t) = -\frac{1}{2} p_0 t \sin(\omega_x t) d\omega_x. \quad (3.15)$$

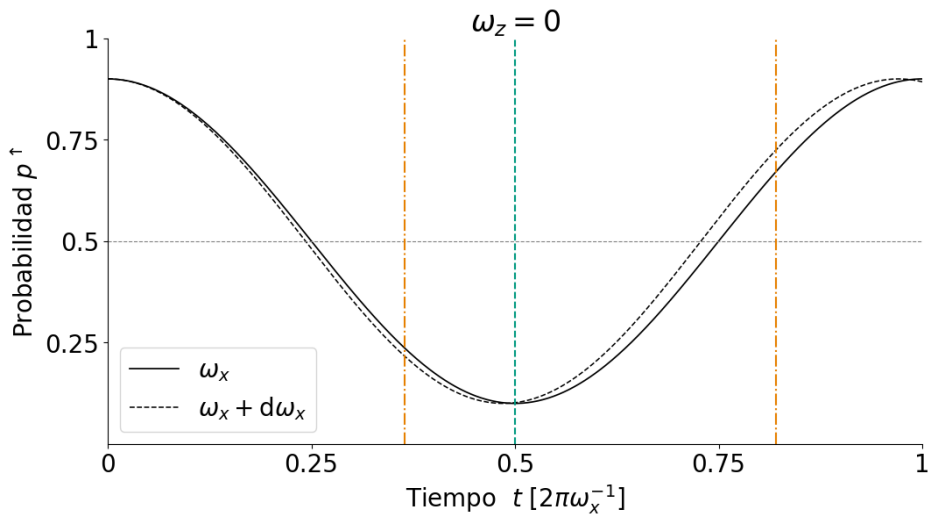


Figura 3.2: Probabilidad p^\uparrow del estado $|\uparrow\rangle$ en función del tiempo para velocidades de precesión ω_x y $\omega_x + d\omega_x$, con $d\omega_x = 0,03\omega_x$. Las líneas verticales naranjas con guión y punto y las verdes marcan los máximos y el mínimo relativo de la CFI respectivamente.

La CFI es (ver derivación en Ap. A.5)

$$F(\omega_x) = \mathbf{p}_0^2 t^2 \frac{\sin^2(\omega_x t)}{1 - \mathbf{p}_0^2 \cos^2(\omega_x t)}. \quad (3.16)$$

Se marcan en la Fig. 3.2 con líneas verticales los tiempos en los cuales la CFI es máxima (línea naranja con guión y punto) o mínima (línea celeste a rayas). El factor $t^2 \sin^2(\omega_x t)$ viene de la diferencia (Ec. 3.15), mientras que el factor $1/(1 - \mathbf{p}_0^2 \cos^2(\omega_x t))$ surge por la distancia de p^\uparrow respecto de 0,5. Los máximos locales de F como función del tiempo no se corresponden con los de la Ec. 3.15 sino que están asociados a un compromiso entre el incremento de F por incrementar la diferencia dp^\uparrow y el decremento de F por acercarse al 0,5. Este balance entre la sensibilidad paramétrica y el contraste de la señal a observar es consistente con lo observado en Ref. [11]

La Fig. 3.3 muestra la CFI y la QFI en función del tiempo para un valor $\mathbf{p}_0 = 0,8$. Observamos que la CFI a lo largo del tiempo oscila entre 0 y la QFI, coincidiendo cuando \mathbf{p} , $\boldsymbol{\omega}$ y la dirección \mathbf{z} de medición del espín son mutuamente perpendiculares (Fig. 3.2), coincidiendo la medición con el observable óptimo.

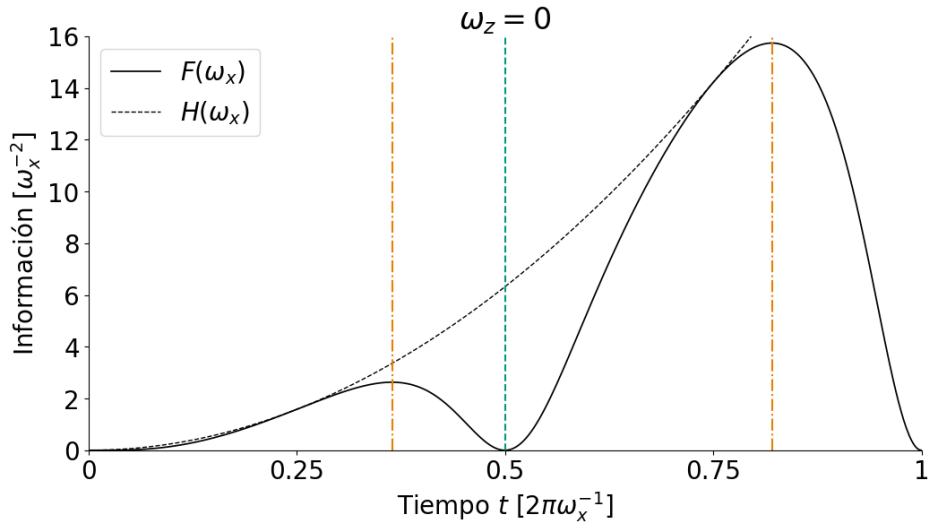


Figura 3.3: Información de Fisher clásica $F(\omega_x)$ (línea macisa) y cuántica $H(\omega_x)$ (línea punteada) en función del tiempo. Las líneas verticales naranjas (estilo guión-punto) y las verdes (estilo lineado) marcan los máximos y el mínimo relativos de la CFI respectivamente.

3.1.2. Evolución y estimación de término transversal con perturbación longitudinal

Consideremos ahora que tenemos un término del Hamiltoniano en la dirección \mathbf{z} , $\boldsymbol{\omega} = \omega_x \mathbf{x} + \omega_z \mathbf{z}$, y queremos hacer la estimación de ω_x , tomando a ω_z como un valor conocido. Como \mathbf{p} en el instante inicial no es perpendicular a $\boldsymbol{\omega}$, el espín precesará

alrededor de ω sobre el círculo perpendicular a ω que contiene a \mathbf{p} en el tiempo inicial, como muestra la Fig. 3.4.

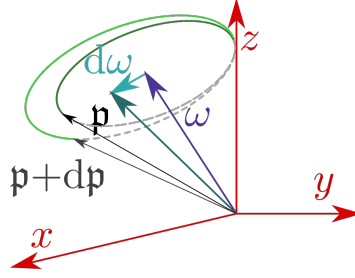


Figura 3.4: Esquema de la precesión de los vectores polarización \mathbf{p} y $\mathbf{p} + d\mathbf{p}$ del espín sensor con velocidad angular ω y $\omega + d\omega_x \mathbf{x}$. La variación $d\omega_x$ introduce tanto una diferencia en la velocidad angular total de precesión, como del cono en el cual precesa.

Una diferencia $d\omega_x \mathbf{x}$ en la velocidad de precesión tendrá ahora dos contribuciones de distinta forma. Por un lado, la diferencia en velocidad angular $\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_z^2}$ producirá una diferencia que crecerá linealmente en el tiempo, mientras que la diferencia en el cono de precesión introducirá una diferencia que queda acotada. Por tanto, la tendencia general de la QFI estará dictada por el término lineal en el tiempo, dado por

$$(\text{radio})(d \text{ ángulo}) = \left(\frac{\omega_x}{\omega} \mathbf{p}_0 \right) (t d\omega) \quad (3.17)$$

$$= \frac{\omega_x^2}{\omega^2} \mathbf{p}_0 t d\omega_x. \quad (3.18)$$

Más exactamente, el vector polarización evolucionará en el tiempo según

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 R[\omega t] \mathbf{z} \quad (3.19)$$

$$= \mathbf{p}_0 \beta(t), \quad (3.20)$$

$$\beta(t) = \begin{pmatrix} \frac{\omega_x \omega_z}{\omega^2} (1 - \cos(\omega t)) \\ -\frac{\omega_x}{\omega} \sin(\omega t) \\ \frac{\omega_z^2}{\omega^2} + \frac{\omega_x^2}{\omega^2} \cos(\omega t) \end{pmatrix}, \quad (3.21)$$

donde $R[\theta]$ representa una rotación por un ángulo θ en el sentido de la regla de la mano derecha en torno al eje θ . La QFI queda dada por (Ver Ap. A.6)

$$H(\omega_x) = \mathbf{p}_0^2 \left\{ \frac{\omega_x^4}{\omega^4} t^2 + 2 \frac{\omega_x^2 \omega_z^2}{\omega^5} \sin(\omega t) t + \frac{\omega_z^2}{\omega^4} \left[(1 - \cos(\omega t))^2 + \frac{\omega_z^2}{\omega^2} \sin^2(\omega t) \right] \right\} \quad (3.22)$$

$$= \mathbf{p}_0^2 t^2 \left\{ \frac{\omega_x^4}{\omega^4} + 2 \frac{\omega_x^2 \omega_z^2}{\omega^5} \frac{\sin(\omega t)}{t} + \frac{\omega_z^2}{\omega^4} \left[\left(\frac{1 - \cos(\omega t)}{t} \right)^2 + \frac{\omega_z^2}{\omega^2} \frac{\sin^2(\omega t)}{t^2} \right] \right\}, \quad (3.23)$$

nuevamente presentando una tendencia cuadrática con el tiempo, atenuada por un factor de ω_x^4/ω^4 .

El proceso de estimación sigue el mismo protocolo descrito en la Subsec. 3.1.1,

donde nuevamente optamos por sensar el sistema a través de las mediciones proyectivas sobre $\mathcal{S} = \{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$. Es importante contrastar el uso de mediciones aquí presente, como mecanismo de medición, con el uso de mediciones de la sección siguiente, donde son utilizadas como herramientas de control. Las probabilidades de los estados $|\uparrow\rangle$ y $|\downarrow\rangle$ respectivamente, toman la forma (ver Ap. ??)

$$p^\uparrow(t) = \frac{1 + \mathbf{p}_0 \left(\frac{\omega_z^2}{\omega^2} + \frac{\omega_x^2}{\omega^2} \cos(\omega t) \right)}{2}, \quad (3.24)$$

$$p^\downarrow(t) = \frac{1 - \mathbf{p}_0 \left(\frac{\omega_z^2}{\omega^2} + \frac{\omega_x^2}{\omega^2} \cos(\omega t) \right)}{2}, \quad (3.25)$$

$$(3.26)$$

Esto es, p^\uparrow oscila centrada en $\frac{1}{2} (1 + \mathbf{p}_0 \omega_z^2 / \omega^2)$ con amplitud $\frac{1}{2} \mathbf{p}_0 \omega_x^2 / \omega^2$, habiendo reducido la amplitud de la oscilación por un factor de ω_x^2 / ω^2 respecto del caso anterior. La Fig. 3.5 muestra esta oscilación para $\omega_z = 2\omega_x$ y $\mathbf{p}_0 = 0,8$. Los valores de ω_x , $d\omega_x$, y la escala de tiempo son los mismos que los de la Fig. 3.2. Apreciamos una reducción significativa de la separación entre las dos curvas para la misma variación $d\omega_x$, que se reflejará en una reducción de la CFI para este caso.

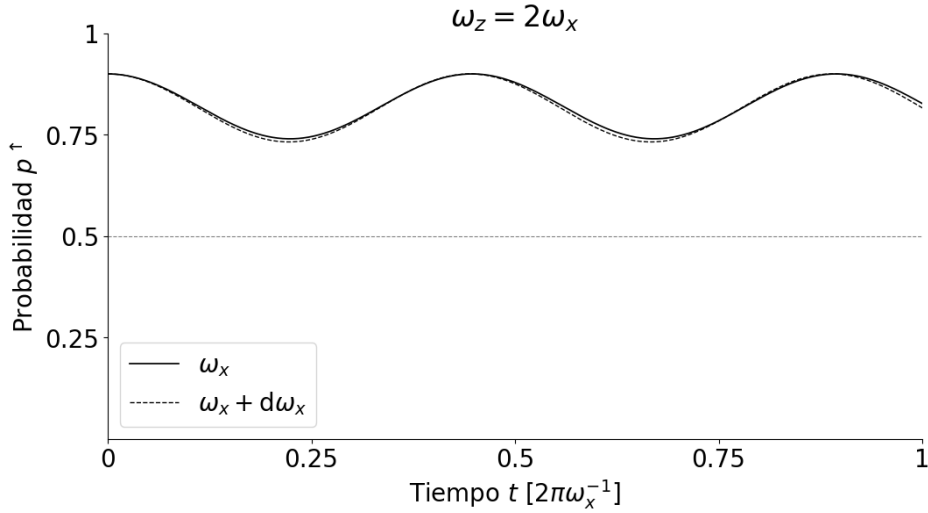


Figura 3.5: Probabilidad p^\uparrow del estado $|\uparrow\rangle$ en función del tiempo para velocidades de precesión ω y $\omega + d\omega_x \mathbf{z}$. La componente \mathbf{z} de la velocidad angular ω produce una reducción de la amplitud de oscilación

La diferencia en p^\uparrow inducida por una variación $d\omega_x \mathbf{x}$ en ω es

$$dp^\uparrow(t) = \frac{1}{2} \mathbf{p}_0 \frac{\omega_x}{\omega} \left[\frac{2 \omega_z^2}{\omega \omega^2} (1 - \cos(\omega t)) + \frac{\omega_x^2}{\omega^2} t \sin(\omega t) \right] d\omega_x, \quad (3.27)$$

siendo proporcional a la suma de las dos contribuciones entre corchetes. Como muestra la Fig. 3.4, \mathbf{p} no difiere sólo por precesar más rápido, sino por precesar alrededor de un

cono distinto.

El primer término de la Ec. 3.27,

$$\mathbf{p}_0 \frac{\omega_x \omega_z^2}{\omega^3} \frac{1 - \cos(\omega t)}{\omega} d\omega_x, \quad (3.28)$$

deriva de la diferencia en la amplitud de oscilación de la proyección de \mathbf{p} en \mathbf{z} introducida por la diferencia de cono de precesión. Este término es periódico en el tiempo, alcanzando un máximo de $(4/\omega)(\omega_z^2/\omega^2)$ cuando $\cos(\omega t) = -1$, que ocurre cuando \mathbf{p} se encuentra en el extremo de su trayectoria más alejado del eje \mathbf{z} ; y un mínimo de 0 cuando $\cos(\omega t) = 1$, que ocurre cuando \mathbf{p} se encuentra sobre el eje \mathbf{z} . El segundo término de la Ec. 3.27,

$$\frac{1}{2} \mathbf{p}_0 \frac{\omega_x^3}{\omega^3} t \sin(\omega t) d\omega_x, \quad (3.29)$$

está asociado a la separación por la diferencia entre las velocidades de precesión, y es el análogo a la diferencia (Ec. 3.15) del caso sin offset. El factor ω_x^2/ω^2 es el factor por el que se redujo la amplitud de oscilación. A tiempos grandes, este término domina la Ec. 3.28, y por tanto la CFI. El factor ω_x/ω que afecta a ambos términos afuera del corchete de la Ec. 3.15 es la variación $\partial_{\omega_x} \omega$ de ω debido a la variación en ω_x .

La CFI toma el valor (ver Ap. A.5, con $t = \mathbf{t}$)

$$F(\omega_x) = \mathbf{p}_0^2 \frac{\omega_x^2}{\omega^2} \frac{\left(2(1 - \cos(\omega t)) \frac{1}{\omega} \frac{\omega_z^2}{\omega^2} + t \frac{\omega_x^2}{\omega^2}\right)^2}{1 - \mathbf{p}_0^2 \left(1 - \frac{\omega_x^2}{\omega^2} (1 - \cos(\omega t))\right)^2}, \quad (3.30)$$

cuyo numerador involucra los términos (Ec. 3.28) y (Ec. 3.29). A tiempos grandes, toma la forma

$$F(\omega_x) \approx \mathbf{p}_0^2 t^2 \frac{\omega_x^6}{\omega^6} \frac{\sin^2(\omega t)}{1 - \mathbf{p}_0^2 \left(1 - \frac{\omega_x^2}{\omega^2} (1 - \cos(\omega t))\right)^2}, \quad (3.31)$$

dominando el término (Ec. 3.29) en la diferencia de la Ec. 3.15. La CFI a tiempos grandes se descompone como el producto entre la QFI y un factor periódico, que ahora no oscila entre 0 y 1 sino entre 0 y $\max_t \frac{\omega_x^6}{\omega^6} \sin^2(\omega t) / \left(1 - \mathbf{p}_0^2 (1 - \omega_x^2/\omega^2 (1 - \cos(\omega t)))^2\right)$. Esto último se debe a que el observable óptimo son las mediciones de la proyección de $\boldsymbol{\sigma}$ en un eje perpendicular tanto a \mathbf{p} como $\boldsymbol{\omega}$, mientras que las mediciones que consideramos son proyecciones de $\boldsymbol{\sigma}$ sobre el eje \mathbf{z} .

La Fig. 3.6 muestra las CFI y QFI para $\omega_z = 2\omega_x$, en comparación con la CFI para $\omega_z = 0$. Observamos una reducción sustancial de la CFI respecto de la circunstancia de offset nulo, además de una separación respecto de la QFI creciente. De la cota de

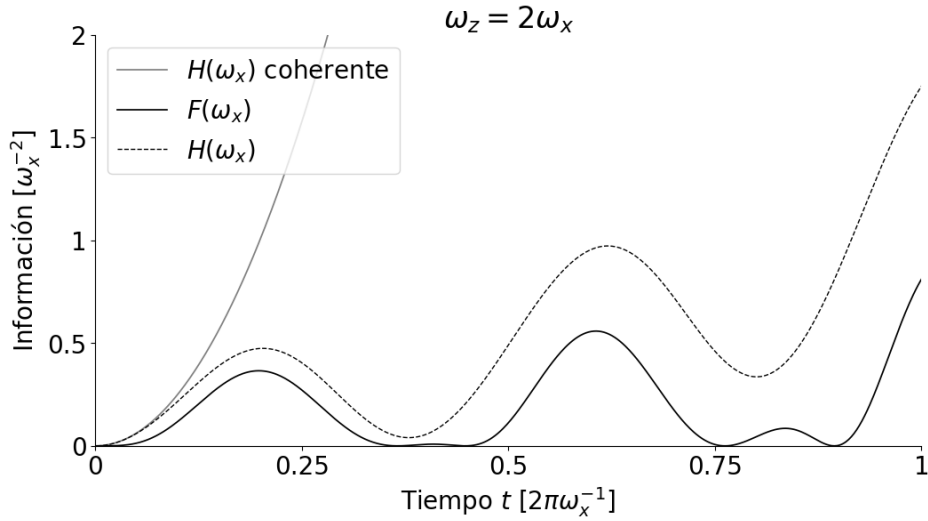


Figura 3.6: Información de Fisher clásica $F(\omega_x)$ (línea macisa negra) y cuántica $H(\omega_x)$ (línea punteada negra) en función del tiempo para un offset ω_z no nulo, junto con la CFI correspondiente a offset nulo.

Cramér-Rao (Ec. 2.38) vemos que el error estadístico $\sqrt{\langle \delta\omega_x^2 \rangle}$ en la estimación de ω_x crecerá respecto al caso de offset nulo por un factor ω^3/ω_x^3 .

3.2. Evolución y estimación con mediciones proyectivas

Consideremos ahora que a intervalos de tiempo τ estroboscópicos, se realiza una medición proyectiva ideal de σ_z . Es decir, entre mediciones proyectivas, el sistema evoluciona coherentemente, como fue descrito en la Sec. 3.1. Tras la n -ésima medición, a tiempo $n\tau$, el sistema ha colapsado a $|\uparrow\rangle$ o $|\downarrow\rangle$ con probabilidad $p^\uparrow(n\tau^-)$ y $p^\downarrow(n\tau^-)$ respectivamente², afectando la evolución subsecuente.

Utilizando el formalismo de la matriz densidad, una medición proyectiva ideal a tiempo t está descrita por la proyección $[\rho(t^+)]_{\mathcal{I}} = \text{diag}[\rho(t^-)]_{\mathcal{I}}$, donde $[O]_{\mathcal{I}}$ representa las componentes del operador O en la base $\mathcal{S} = \{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$. Es decir, la matriz densidad tras la medición corresponde a un ensamble estadístico clásico, con la misma probabilidad de encontrar al sistema en cada autoestado de σ_z que el instante anterior. El efecto de las mediciones proyectivas es forzar (reiniciar) el comienzo de la oscilación, con la diferencia de poblaciones obtenidas al momento de la medición.

En términos del vector polarización, la medición proyectiva a tiempo t toma la forma $\mathbf{p}(t^+) = (\mathbf{z} \cdot \mathbf{p}(t^-))\mathbf{z}$. La Fig. 3.7 muestra el efecto de las mediciones en la evolución de \mathbf{p} . Comenzando desde un valor de \mathbf{p} alineado con \mathbf{z} , \mathbf{p} precesa durante su evolución coherente en torno a $\boldsymbol{\omega}$. La medición proyectiva, al llevar cada estado del ensamble a

²Aquí, $f(x^-)$ denota $\lim_{y \rightarrow x^-} f(y)$.

$|\uparrow\rangle$ o $|\downarrow\rangle$, tiene el efecto de proyectar el vector \mathbf{p} hacia el eje z . A partir de allí, \mathbf{p} volverá a precesar en torno a $\boldsymbol{\omega}$ hasta la siguiente medición; el ángulo descrito sobre el cono entre mediciones será $\omega\tau$.

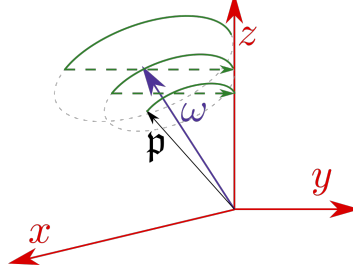


Figura 3.7: Esquema de la precesión del vector polarización \mathbf{p} del espín sensor con velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$, sujeto a mediciones proyectivas cada tiempo τ . La medición tiene el efecto de proyectar \mathbf{p} sobre el eje z .

Si $|\omega_z| > |\omega_x|$, el ángulo de $\boldsymbol{\omega}$ con \mathbf{x} será mayor a $\pi/4$, por lo que el cono de precesión, dado por la revolución de \mathbf{p} alrededor de $\boldsymbol{\omega}$, no atravesará el plano \mathbf{xy} . En estas circunstancias, las sucesivas mediciones disminuirán la polarización total, haciéndola tender a 0 cuando el tiempo de experimento tienda a infinito. Cuando $|\omega_z| < |\omega_x|$, el cono de precesión atraviesa el plano \mathbf{xy} , como muestra la Fig. 3.8. Si la proyección se realiza previo a que \mathbf{p} atraviese dicho plano, la dinámica es similar a lo ya descrito. Si la proyección es hecha una vez que \mathbf{p} atraviesa el plano \mathbf{xy} , además de disminuirse el módulo de \mathbf{p} , tomará el sentido contrario al del comienzo de la evolución coherente, y el nuevo cono de precesión será la reflexión respecto del plano \mathbf{xy} del cono anterior. El resultado en estas circunstancias es una reducción del módulo de \mathbf{p} tras cada medición proyectiva, como antes, pero con una alternancia en el sentido de \mathbf{p} . Una última posibilidad es la de realizar la medición proyectiva cuando \mathbf{p} está sobre el plano \mathbf{xy} , en cuyo caso \mathbf{p} se proyecta a $\mathbf{0}$, sin evolución subsecuente.

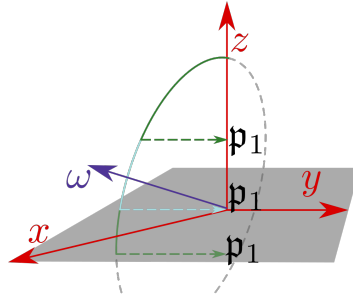


Figura 3.8: Esquema de la precesión del vector polarización \mathbf{p} del espín sensor con velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$, tras la primera medición proyectiva. Los vectores \mathbf{p}_1 , \mathbf{p}_2 , y \mathbf{p}_3 corresponden al vector polarización tras la proyección cuando ésta se realiza antes, mientras, y después que \mathbf{p} atraviese el plano \mathbf{xy} respectivamente.

Consideremos ahora la estimación mediante la medición sobre los autoestados de σ_z . Las mediciones proyectivas se hacen cada tiempo τ , de modo que $\rho(n\tau)$ es diagonal

($n \in \mathbb{N}_0$) y la evolución del sistema es coherente para $t \in [n\tau, (n+1)\tau)$. Expresando el tiempo transcurrido t como $t = n\tau + \mathbf{t}$, con $n \in \mathbb{N}_0$ y $\mathbf{t} \in [0, \tau)$, la evolución de \mathbf{p} toma la forma

$$\mathbf{p}(n\tau + \mathbf{t}) = \mathbf{p}_0(\alpha(\tau))^n \mathbf{R}[\omega \mathbf{t}] \mathbf{z} = \mathbf{p}_0(\alpha(\tau))^n \boldsymbol{\beta}(\mathbf{t}), \quad \alpha(t) = \frac{\omega_z^2}{\omega^2} + \frac{\omega_x^2}{\omega^2} \cos(\omega t). \quad (3.32)$$

Para ver esto, observamos que durante cada ciclo τ el vector polarización comienza en la forma $\mathbf{p}(n\tau) \mathbf{z}$, es rotado con $\mathbf{R}[\omega \tau]$ y lo proyecta sobre \mathbf{z} , de modo que el efecto neto es reducir la componente z en un factor $\alpha(\tau) = \mathbf{z} \cdot (\mathbf{R}[\omega \tau] \mathbf{z})$. El factor $\mathbf{R}[\omega \mathbf{t}]$ que sigue corresponde a la evolución coherente subsecuente.

La derivada de \mathbf{p} , a utilizar en la Ec. 2.44, queda dada por

$$\partial_{\omega_x} \mathbf{p}(n\tau + \mathbf{t}) = \mathbf{p}_0 \left[n(\alpha(\tau))^{n-1} \partial_{\omega_x} \alpha(\tau) \boldsymbol{\beta}(\mathbf{t}) + (\alpha(\tau))^n \partial_{\omega_x} \boldsymbol{\beta}(\mathbf{t}) \right], \quad (3.33)$$

$$\partial_{\omega_x} \mathbf{p}_r(n\tau) = \mathbf{p}_0 n(\alpha(\tau))^{n-1} \partial_{\omega_x} \alpha(\tau) \boldsymbol{\beta}(\mathbf{t}), \quad (3.34)$$

$$\partial_{\omega_x} \mathbf{p}_t(n\tau) = \mathbf{p}_0(\alpha(\tau))^n \partial_{\omega_x} \boldsymbol{\beta}(\mathbf{t}). \quad (3.35)$$

La variación radial está dada por la variación $\mathbf{p}_0 n(\alpha(\tau))^{n-1} \partial_{\omega_x} \alpha(\tau)$ en la amplitud al comienzo del n -ésimo ciclo, y no depende del tiempo de evolución coherente \mathbf{t} , mientras que la variación tangencial es la variación durante el movimiento coherente. De este modo, la QFI toma la forma

$$H(\omega_x) = \mathbf{p}_0^2 n^2 \frac{(\alpha(\tau))^{2(n-1)}}{1 - \mathbf{p}_0^2 (\alpha(\tau))^{2n}} (\partial_{\omega_x} \alpha(\tau))^2 + \mathbf{p}_0^2 (\alpha(\tau))^{2n} (\partial_{\omega_x} \boldsymbol{\beta}(\mathbf{t}))^2, \quad (3.36)$$

$$(\partial_{\omega_x} \alpha(\tau))^2 = \left(\frac{\omega_x}{\omega} \right)^2 \left[2 \frac{\omega_z^2}{\omega^3} (1 - \cos(\omega \tau)) + \frac{\omega_x^2}{\omega^2} \tau \sin(\omega \tau) \right]^2, \quad (3.37)$$

$$(\partial_{\omega_x} \boldsymbol{\beta}(\mathbf{t}))^2 = \frac{\omega_x^4}{\omega^4} \mathbf{t}^2 + 2 \frac{\omega_x^2 \omega_z^2}{\omega^5} \sin(\omega \mathbf{t}) \mathbf{t} + \frac{\omega_z^2}{\omega^4} \left[(1 - \cos(\omega \mathbf{t}))^2 + \frac{\omega_z^2}{\omega^2} \sin^2(\omega \mathbf{t}) \right]. \quad (3.38)$$

El primer término de la Ec. 3.36 es idéntico a la QFI asociada a un decaimiento exponencial de la polarización de la forma $\mathbf{p}_0 e^{-t/T_c}$, de tiempo característico $T_c = \tau / \log(\alpha(\tau))$, mientras que el segundo corresponde a la QFI de la sección previa para una estimación coherente con polarización inicial $\mathbf{p}_0(\alpha(\tau))^n \mathbf{z}$ tras tiempo \mathbf{t} . Si nos enfocamos en los tiempos de proyección, con $\mathbf{t} = 0$, vemos que la forma general es la del decaimiento exponencial dado por el primer término. El mismo consiste de una campana que alcanza un máximo a tiempo finito alrededor de la mitad del decaimiento (ver Fig. 3.15), y luego decae nuevamente a 0, pues las señales son indistinguibles cuando su intensidad se acerca a 0.

La evolución de las probabilidades $p^\uparrow(t)$ y $p^\downarrow(t)$ toma la forma $\frac{1}{2}[1 + \mathbf{z} \cdot \mathbf{p}]$, es decir

$$p^\uparrow(n\tau + t) = \frac{1 + \mathbf{p}_0(\alpha(\tau))^n \alpha(t)}{2}, \quad (3.39)$$

$$p^\downarrow(n\tau + t) = \frac{1 - \mathbf{p}_0(\alpha(\tau))^n \alpha(t)}{2}. \quad (3.40)$$

La Fig. 3.9 muestra p^\uparrow como función del tiempo para $\omega_z = \frac{1}{2}\omega_x$. En estas circunstancias, el cono de precesión atraviesa el plano \mathbf{xy} , que se refleja en el hecho de que p^\uparrow atraviesa el valor 0,5 si se deja al espín evolucionar coherentemente. Las tres curvas rayadas corresponden a las tres circunstancias cualitativamente distintas ilustradas previamente: las mediciones proyectivas pueden realizarse antes, mientras, o después que \mathbf{p} atraviese el plano \mathbf{xy} .

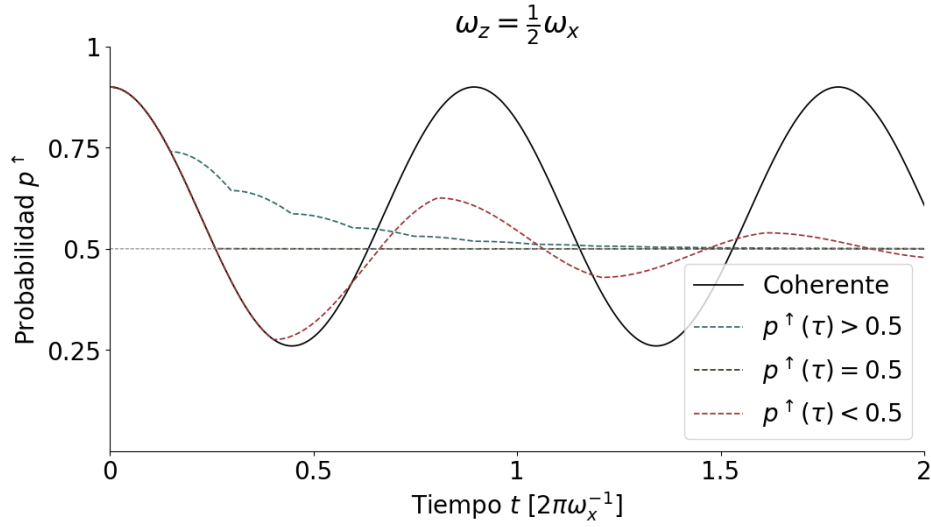


Figura 3.9: Probabilidad p^\uparrow del estado $|\uparrow\rangle$ en función del tiempo, bajo la evolución coherente (línea macisa), y con mediciones proyectivas realizadas antes que p^\uparrow atraviese el eje $p^\uparrow = 0,5$ (línea punteada celeste), cuando lo atraviesa (línea punteada verde), y tras que lo atraviesa (línea punteada roja).

El caso $p^\uparrow(\tau) > 0,5$ luce similar a un decaimiento exponencial. Observando p^\uparrow sólo en los puntos de medición, la curva toma la forma $p^\uparrow(t) = \frac{1}{2}(1 + (\alpha(\tau))^n)$, que efectivamente decae hacia 0,5 exponencialmente con t , siguiendo la forma funcional $\exp(\alpha(\tau)t/\tau)$. El caso $p^\uparrow(\tau) < 0,5$ es más complicado; no obstante, la tendencia general es la misma, ya que observando p^\uparrow cada 2τ , p^\uparrow presenta un decaimiento exponencial.

Como la dependencia temporal está en el producto $(\alpha(\tau))^n \alpha(t)$, la variación de p^\uparrow se separa como la suma de dos términos,

$$dp^\uparrow(t) = \mathbf{p}_0(\alpha(\tau))^{n-1} (n\alpha'(\tau)\alpha(t) + \alpha(\tau)\alpha'(t)) d\omega_x. \quad (3.41)$$

El primero correspondiente a la variación del decaimiento exponencial de p^\uparrow , y el segundo asociado a la variación durante el tramo coherente.

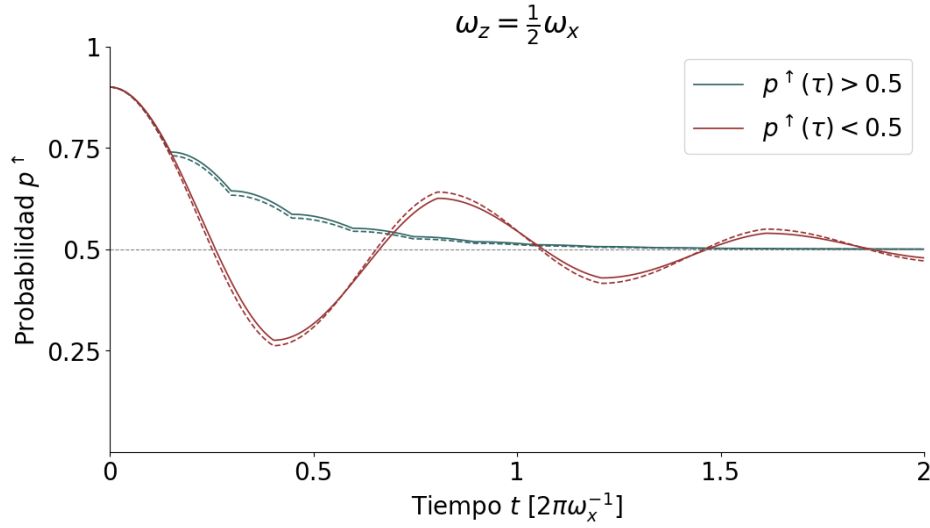


Figura 3.10: Probabilidad p^\uparrow del estado $|\uparrow\rangle$ en función del tiempo bajo la evolución con mediciones proyectivas realizadas antes que p^\uparrow atravesase el eje $p^\uparrow = 0,5$ (línea celeste) y tras que lo atraviesa (línea roja), para dos valores de ω_x distando en $d\omega_x = 0,03\omega_x$ (línea macisa y línea punteada vecina).

La CFI y refleja estas dos contribuciones, valiendo

$$\begin{aligned}
 F(\omega_x) = & \mathbf{p}_0^2 \frac{\omega_x^2}{\omega^2} \frac{(\alpha(\tau))^{2(n-1)}}{1 - \mathbf{p}_0^2 (\alpha(\tau))^{2n} (\alpha(\mathbf{t}))^2} \\
 & \cdot \left[n\tau \left(2 \frac{1 - \cos(\omega\tau)}{\omega\tau} \frac{\omega_z^2}{\omega^2} + \sin(\omega\tau) \frac{\omega_x^2}{\omega^2} \right) \alpha(\mathbf{t}) \right. \\
 & \left. + \mathbf{t} \left(2 \frac{1 - \cos(\omega\mathbf{t})}{\omega\mathbf{t}} + \sin(\omega\mathbf{t}) \frac{\omega_x^2}{\omega^2} \right) \alpha(\tau) \right]^2, \quad (3.42)
 \end{aligned}$$

Como las mediciones proyectan al sistema a los autoestados de σ_z , la CFI y la QFI coinciden en los momentos de medición $t = n\tau$, por lo que comparten la misma tendencia general. La Fig. 3.11 muestra la CFI (fila superior) como función de τ y del tiempo total t , para tres valores de offset: $\omega_z = 0,25\omega_x$, $\omega_z = 2,5\omega_x$, $\omega_z = 6,25\omega_x$. Estos valores fueron elegidos para mostrar las circunstancias donde $\omega_z < \omega_x$ y $\omega_z > \omega_x$. El segundo valor permite ver que existen dos regiones, separadas por una línea a lo largo de la cual la CFI es nula, que se da cuando la medición proyectiva reduce el vector polarización a $\mathbf{0}$, como vimos antes.

Observamos una tendencia general cuadrática en la CFI, afectada por oscilaciones que además, para offset alto, se hacen pequeñas. Esta tendencia está gobernada por el término asociado al decaimiento exponencial de tanto la QFI (Ec. 3.38) como la CFI (término de $F(\omega_x)$ correspondiente al cuadrado del segundo término en corchetes de la Ec. 3.42), que coinciden en los tiempos de medición ($\mathbf{t} = 0$). Definimos entonces la

función suave

$$G(\omega_x) = \mathbf{p}_0^2 \frac{\omega_x^2}{\omega^2} (\mathbf{n}\tau)^2 \frac{(\alpha(\tau))^{2(\mathbf{n}-1)}}{1 - \mathbf{p}_0^2 (\alpha(\tau))^{2\mathbf{n}}} \left[2 \frac{\omega_z^2}{\omega^2} \frac{1 - \cos(\omega\tau)}{\tau} + \frac{\omega_x^2}{\omega^2} \sin(\omega\tau) \right], \quad \mathbf{n} = t/\tau, \quad (3.43)$$

que se muestra en la fila inferior de la Fig. 3.11. Definimos esta función, ya que ésta manifiesta la misma tendencia general que la CFI, coincide con la QFI y con la CFI en los tiempos de medición, y facilita el análisis de sus máximos. Cuando hablemos de G estaremos hablando entonces de la tendencia general de tanto la CFI como de la QFI, a menos de oscilaciones que removimos.

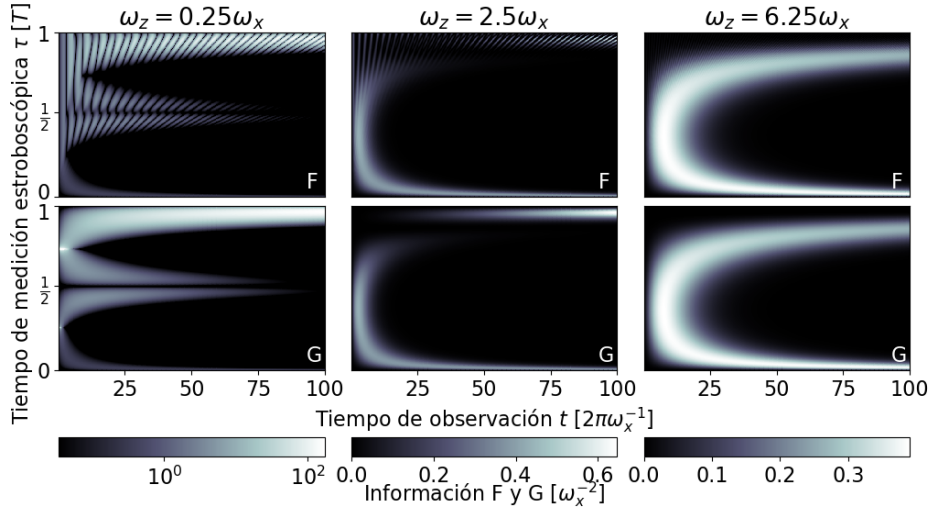


Figura 3.11: Información de Fisher clásica F (fila superior) y su aproximación suave G (fila inferior) en función del tiempo de medición estroboscópica τ (en unidades del período $T = 2\pi/\omega$) y el tiempo transcurrido t , para offset $\omega_z = 0,25\omega_x$, $\omega_z = 2,5\omega_x$, y $\omega_z = 6,25\omega_x$ como se muestra en la leyenda (columnas izquierda, central y derecha, respectivamente).

La función G corresponde a la información de Fisher de ω_x de la distribución de probabilidad con decaimiento exponencial

$$\tilde{p}^\dagger(t) = \frac{1 + \mathbf{p}_0 |\alpha(\tau)|^{t/\tau}}{2} = \frac{1 + \mathbf{p}_0 \exp[\log |\alpha(\tau)| t/\tau]}{2}, \quad (3.44)$$

de tiempo característico

$$T_c(\tau) = -\frac{\tau}{\log |\alpha(\tau)|}. \quad (3.45)$$

La Fig. 3.12 muestra el tiempo característico como función de τ . Cuando τ es pequeño, $T_c(\tau)$ tiende a infinito. Esto es, las mediciones frecuentes sobre el sistema detienen su evolución temporal. Este fenómeno es conocido como el **Efecto Zenón Cuántico** (QZE). Si $\omega_z > \omega_x$, existe además un valor de τ para el cual $T_c(\tau)$ es mínimo, fenómeno conocido como **Efecto Anti-Zenón Cuántico** (AZE). En los sistemas en los que se observan ambos efectos, a los valores de los parámetros de control para los

cuales se consigue el QZE y el AZE, se los denomina “régimen Zenón” y “régimen Anti-Zenón”. En el régimen Zenón, en el límite $\tau \rightarrow 0$,

$$T_c(\tau) \approx \frac{2}{\omega_x^2} \frac{1}{\tau}, \quad (3.46)$$

cuyo resultado es independiente del offset ω_z . Los tiempos de evolución del sistema escalan con $1/\tau$. Para offset grande, $\omega_z \gg \omega_x$,

$$T_c \approx \frac{\omega^2}{\omega_x^2} \frac{\tau}{2 \sin^2\left(\frac{1}{2}\omega\tau\right)}, \quad (3.47)$$

cuyo mínimo τ_0 se corresponde con el régimen anti-Zenón, y es la solución de la ecuación

$$\omega\tau = \tan\left(\frac{1}{2}\omega\tau\right). \quad (3.48)$$

Como la CFI se obtiene derivando *respecto de* ω_x , es importante tener en cuenta que T_c depende de ω_x y por tanto el *valor* del máximo no dependerá únicamente de T_c , sino de su derivada *respecto de* ω_x .

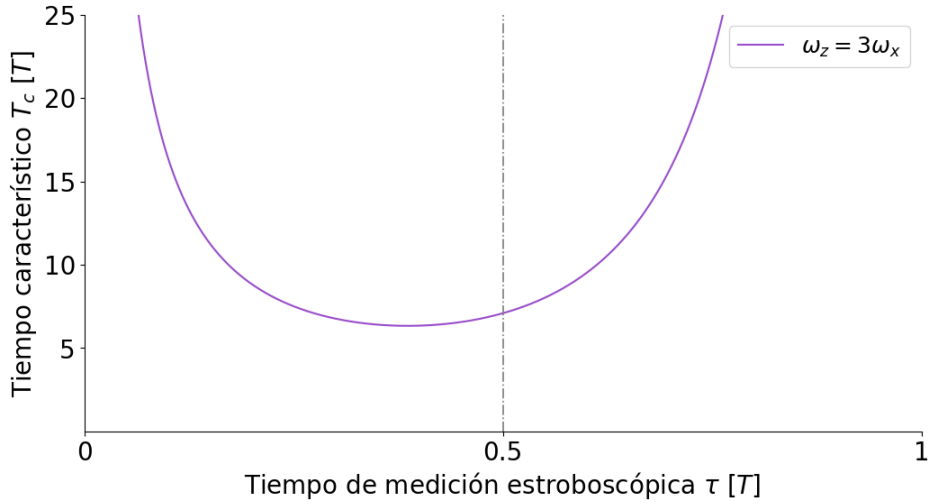


Figura 3.12: Tiempo característico $T_c = -\tau / \log |\alpha(\tau)|$ del decaimiento exponencial en función del tiempo de medición estroboscópica τ , en unidades del período $T = 2\pi/\omega$.

Fijado τ , G depende del tiempo de la forma

$$G_t(\omega_x) = (2t/T_c(\tau))^2 \frac{\exp[-2t/T_c(\tau)]}{1 - p_0^2 \exp[-2t/T_c(\tau)]}. \quad (3.49)$$

Como ésta sólo depende del cociente $t/T_c(\tau)$, la forma de $G(\omega_x)$ como función de t será la misma para todo τ , expandida por el factor $T_c(\tau)$. El tiempo $t_{\max}(\tau)$ para el cual

G_t , y por tanto G , es máximo, está dado por

$$t_{\max}(\tau) = T_c(\tau) \xi(\mathbf{p}_0), \quad \xi(\mathbf{p}_0) = 1 + \frac{1}{2} W(-2\mathbf{p}_0^2/e^2), \quad (3.50)$$

donde W representa la rama principal de la función W de Lambert. La constante $\xi(\mathbf{p}_0)$ depende *únicamente* de la diferencias de poblaciones en el instante inicial, y varía monótonamente desde $\sim 0,79$ hacia 1 en la medida en que \mathbf{p}_0 va desde 1 hacia 0. El valor G_{\max} de G en el tiempo óptimo t_{\max} es

$$G_{\max}(\omega_x) = \varphi(\mathbf{p}_0) \frac{\omega_x^2}{\omega^2} \frac{T_c(\tau)^2}{(\alpha(\tau))^2} \left[2 \frac{1 - \cos(\omega\tau)}{\omega\tau} \frac{\omega_z^2}{\omega^2} + \sin(\omega\tau) \frac{\omega_x^2}{\omega^2} \right]^2, \quad (3.51)$$

$$\varphi(\mathbf{p}_0) = \frac{\mathbf{p}_0^2 (\xi(\mathbf{p}_0))^2}{e^{2\xi(\mathbf{p}_0)} - \mathbf{p}_0^2}, \quad (3.52)$$

y se muestra en la Fig. 3.13 como función de τ , para los mismos casos que en la Fig. 3.11. A la hora de elegir el control, la elección de τ determina el máximo esperable de información G_{\max} y el tiempo necesario t_{\max} para obtenerlo.

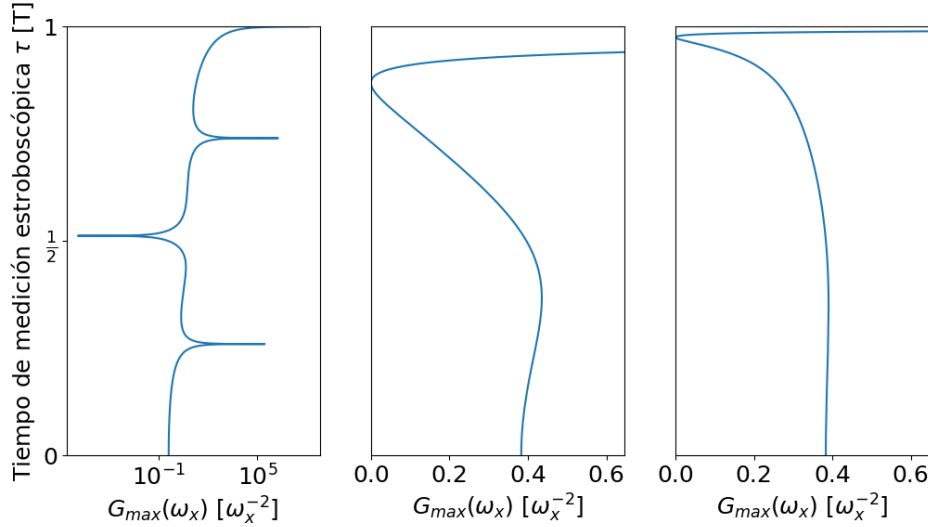


Figura 3.13: Máximo G_{\max} de G para el tiempo óptimo t_{\max} (ordenada), en función del tiempo de medición estroboscópica τ (en unidades del período $T = 2\pi/\omega$), para los casos de offset $\omega_z = 0,25\omega_x$, $\omega_z = 2,5\omega_x$, y $\omega_z = 6,25\omega_x$ presentados en la Fig. 3.11 respectivamente.

En la Fig. 3.13 observamos que existe un valor crítico τ_0 de τ para el cual G es nula independientemente del tiempo, cuando el término entre corchetes de la Ec. 3.43 se anula, y por tanto G_{\max} es nula. Este efecto podría estar relacionado con la manifestación de fenómenos críticos en la información extraíble, donde se observó que hay zonas donde no se puede extraer información paramétrica, y que éstas definen transiciones entre regímenes dinámicos del sensor [22]. Este valor va desde $\frac{1}{2}T$ cuando $\omega_z = 0$ hasta T cuando $\omega_z \rightarrow \infty$, donde $T = 2\pi/\omega$ es el período de oscilación.

La información máxima extraíble en el régimen zenón ($\tau \rightarrow 0$) es independiente de

ω_z , y vale

$$G_0 = 4\varphi(\mathbf{p}_0)/\omega_x^2. \quad (3.53)$$

Esto es muy importante, ya que *no es necesario conocer ω_z para poder estimar el parámetro ω_x* .

Para todo valor de ω_z tal que $\omega_z > \omega_x$, G_{\max} luce cualitativamente igual. Por debajo de la raíz τ_0 de G_{\max} , la función vale aproximadamente G_0 , mientras que por encima tiende a ∞ en la medida en que $\tau \rightarrow T^3$. La información máxima extraíble *se encuentra en el mismo orden de magnitud* tanto para el *regimen Zenón* como el *regimen anti-Zenón*; la mayor diferencia se encuentra en el *tiempo óptimo* t_{\max} en el cual éstas se maximizan, que son más largos en el régimen Zenón que en el anti-Zenón. Cuando $\omega_z \rightarrow \infty$, G_{\max} tiende puntualmente a la función constante de valor G_0 , como refleja el panel derecho de la Fig. 3.13, donde τ_0 se ha desplazado hacia T y G_{\max} se ha aplanado.

Para el caso de $\omega_z < \omega_x$, G_{\max} tiene una estructura complicada, asociada a la alternancia del decaimiento de p^\uparrow . Queda pendiente evaluar las posibles ventajas de trabajar en tal régimen, pero como la dinámica se asemeja a la evolución coherente, especulamos que no haya ventajas sustanciales en la dinámica proyectiva.

3.3. Amplificando información con QZE: Comparación entre evolución coherente y evolución proyectiva

La motivación de este trabajo es comparar entre dos métodos de control del sistema sensor con el objetivo de estimar parámetros de forma más eficiente; en particular para determinar los escenarios donde la evolución guiada por mediciones proyectivas supera a la evolución coherente y libre del sistema sensor. Hay resultados previos donde se demostró que el regimen Zenón es más eficiente para estimar la magnitud del acople de interacción entre el sensor y el ambiente[11], y en otros que se observó experimentalmente que es más sencillo hacerlo que con la evolución coherente [17].

La Fig. 3.14 muestra la evolución de un espín bajo los efectos del mismo campo magnético, para los casos de evolución coherente y control proyectivo con $\tau = \frac{1}{4}T$, junto con la curva asociada a una variación $d\omega_x$ en ω_x .

La separación dp^\uparrow causada por $d\omega_x$ en el caso coherente puede hacerse arbitrariamente grande, provisto suficiente tiempo. Sin embargo, el decaimiento exponencial

³Esto sugiere utilizar tal límite para obtener más información pero, como demostramos en el apéndice, el tiempo t_{\max} tiende a ∞ en el mismo límite, limitando la aplicabilidad. Esta divergencia de la información extraíble se puede asociar al hecho de que, en la medida que $\tau \rightarrow T$, el control proyectivo es indistinguible de la evolución coherente.

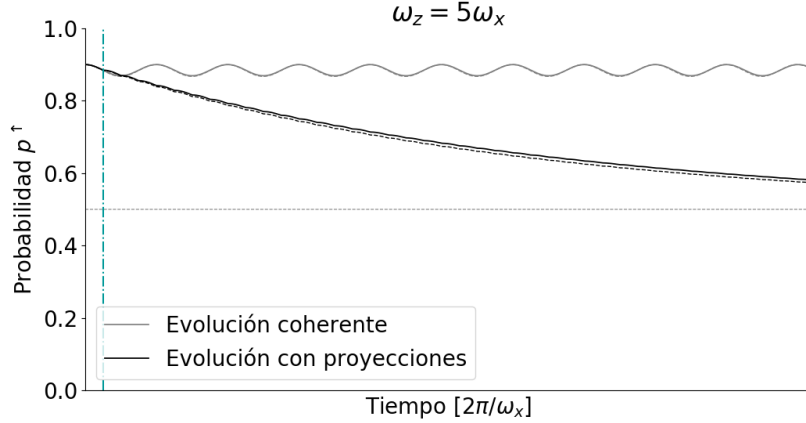


Figura 3.14: Probabilidad p^\dagger como función del tiempo para la evolución coherente (línea gris) y la proyectiva (línea negra), junto con la variación dp^\dagger introducida por una variación $d\omega_x$ en el parámetro (líneas rayadas). La línea vertical celeste estilo guión punto marca el tiempo $t = \tau$ de la primera medición.

causado por las mediciones proyectivas produce una mayor separación dp^\dagger si el tiempo total de experimento disponible es acotado. Esta separación más temprana en el caso de evolución con proyecciones comparada con la evolución coherente se observa en la Fig. 3.14. La Fig. 3.15 muestra además la CFI correspondiente a los mismos parámetros que la Fig. 3.14; observamos que efectivamente la información asociada al control proyectivo supera la asociada al control coherente para los tiempos ilustrados.

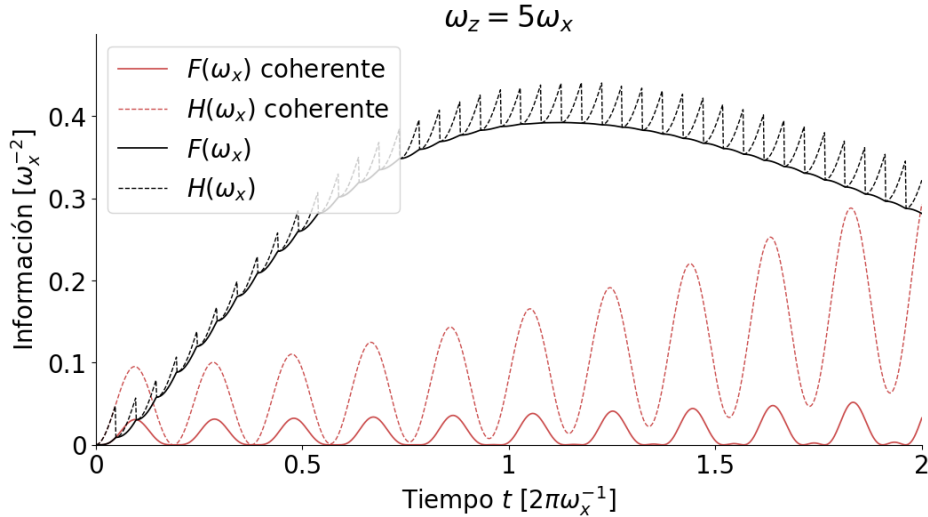


Figura 3.15: Información de Fisher clásica $F(\omega_x)$ (línea maciza) y cuántica $H(\omega_x)$ (línea punteada) en función del tiempo para la evolución coherente (color rojo) y con mediciones proyectivas (color negro), donde el tiempo entre mediciones es τ , y el offset está descrito en la leyenda.

Consideremos entonces como parámetros el offset ω_z y el tiempo total disponible T . En la Sec. 3.1 vimos que la QFI para evolución coherente sigue la forma aproximada $H(\omega_x) \approx \mathbf{p}_0^2 t^2 \omega_x^4 / \omega^4$, de modo que las superficies de nivel de QFI constante tomarán la

forma

$$\mathbf{p}_0 t = \sqrt{H(\omega_x)} \left(1 + \frac{\omega_z^2}{\omega_x^2} \right). \quad (3.54)$$

Por otro lado, en la Sec. 3.2 vimos que, fijado τ , la QFI máxima obtenible en el tiempo para evolución proyectiva se haya sobre la curva

$$t = \xi(\mathbf{p}_0) T_c(\tau), \quad (3.55)$$

y para valores altos de ω_z alcanza el valor constante $G_0 = 4\varphi(\mathbf{p}_0)/\omega_x^2$, con la forma aproximada

$$t \approx \xi(\mathbf{p}_0) \frac{\omega_z^2}{\omega_x^2} \frac{\tau}{1 - \cos(\omega\tau)}. \quad (3.56)$$

El proceso de optimización en esta circunstancia tomará el valor de τ que minimice este tiempo, dado por

$$1 - \cos(\omega\tau) - \omega\tau \sin(\omega\tau) = 0. \quad (3.57)$$

Definiendo $\gamma \approx 2,331$ como el valor de $\omega\tau$ que resuelve dicha ecuación, tendremos

$$t \approx \omega \frac{\xi(\mathbf{p}_0)}{\omega_x^2 \sin \gamma} \quad (3.58)$$

$$\approx \omega_z \frac{\xi(\mathbf{p}_0)}{\omega_x^2 \sin \gamma}, \quad (3.59)$$

que actúa como curva de nivel de $H(\omega_z)$ de valor G_0 para $\omega_z \gg \omega_x$, y el tiempo para alcanzar dicho valor escala proporcional a ω_z . Como la curva de nivel asociada al mismo valor de QFI para la estimación coherente escala proporcional a ω_z^2 , vemos que habrá una separación definida entre dos regiones, una a altos valores de offset donde la estimación proyectiva maximice la información disponible, y otra donde la estimación coherente sea preferible.

La Fig. 3.16 muestra la CFI en función del offset ω_z y el tiempo transcurrido t para ambos esquemas de control, nuevamente eligiendo $\tau = \frac{1}{4}T$. Las líneas punteadas denotan las curvas de nivel de $F(\omega_x)$ correspondientes a G_0 . La escala de colores es la misma en ambos gráficos, limitada por el máximo de la CFI durante el control proyectivo; los puntos saturados en el control coherente alcanzan valores 3 órdenes de magnitud mayores a los del control proyectivo.

Consideremos el tiempo de experimento necesario para alcanzar el valor G_0 , que llamaremos t_0 , en los dos casos. Para el control proyectivo, t_0 posee una tendencia lineal en función de ω_z , mientras que para el control coherente t_0 sigue una curva similar a

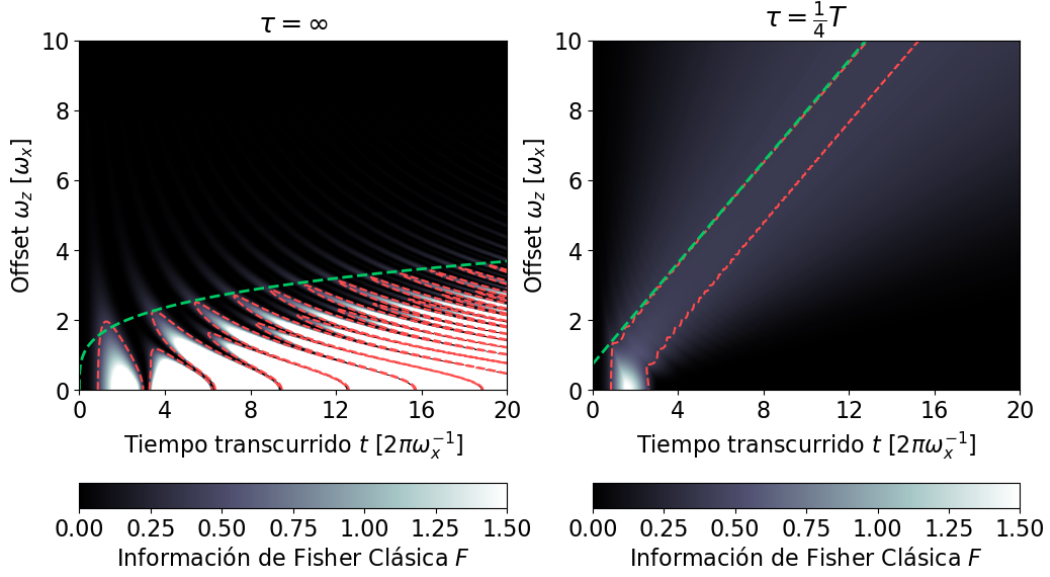


Figura 3.16: Información de Fisher clásica como función del offset ω_z y del tiempo transcurrido t , durante la evolución coherente (panel izquierdo) y con mediciones proyectivas (panel derecho). Las líneas rojas punteadas son las líneas de nivel correspondientes a G_0 (Ec. 3.53), el máximo de la CFI en función del tiempo para $\omega_z \geq \omega_x$. La línea verde es sólo ilustrativa, y marca la tendencia del tiempo t_0 en el que se alcanza este valor.

una ley de potencia con exponente menor que 1. Ambas tendencias se marcan con línea verde a rayas en la Fig. 3.16. Efectivamente, esto demuestra que *existen dos regiones bien delimitadas donde un control es preferible por sobre el otro*, determinadas por el valor de ω_z . Este es el resultado principal de este trabajo.

Esta curva de decisión puede ser aproximada como la superficie de nivel de la QFI durante estimación coherente correspondiente a $H(\omega_x) = G_0 = 4\varphi(\mathbf{p}_0)/\omega_x$ que, para los regímenes de offset alto puede ser aproximada utilizando la Ec. 3.54, definiendo la condición para que las mediciones proyectivas maximicen la información como

$$\mathbf{p}_0 \mathcal{T} < 2 \frac{\sqrt{\varphi(\mathbf{p}_0)}}{\omega_x} \left(1 + \frac{\omega_z^2}{\omega_x^2} \right), \quad (3.60)$$

donde \mathcal{T} es el tiempo total disponible de experimento.

Más aún, en el límite de polarización baja, $\varphi(\mathbf{p}_0) = e^{-2}\mathbf{p}_0^2$, de modo que el criterio resulta

$$\mathcal{T} < 2e \frac{1}{\omega_x} \left(1 + \frac{\omega_z^2}{\omega_x^2} \right), \quad (3.61)$$

independiente de la polarización inicial.

Para resumir este efecto, la Fig. 3.17 muestra el cociente entre la máxima CFI obtenible para el tiempo total del experimento \mathcal{T} para el control proyectivo y el control coherente, en función del offset ω_z y el tiempo total del experimento \mathcal{T} . La línea

de cociente unitario define la separación del control conveniente: para valores de ω_z superiores a ésta, es conveniente el control proyectivo, mientras que por debajo es conveniente el control coherente. De esta forma, dependiendo el tiempo que se tiene para medir, a un dado ω_z , esta curva *define el método de control a usar para maximizar la información*.

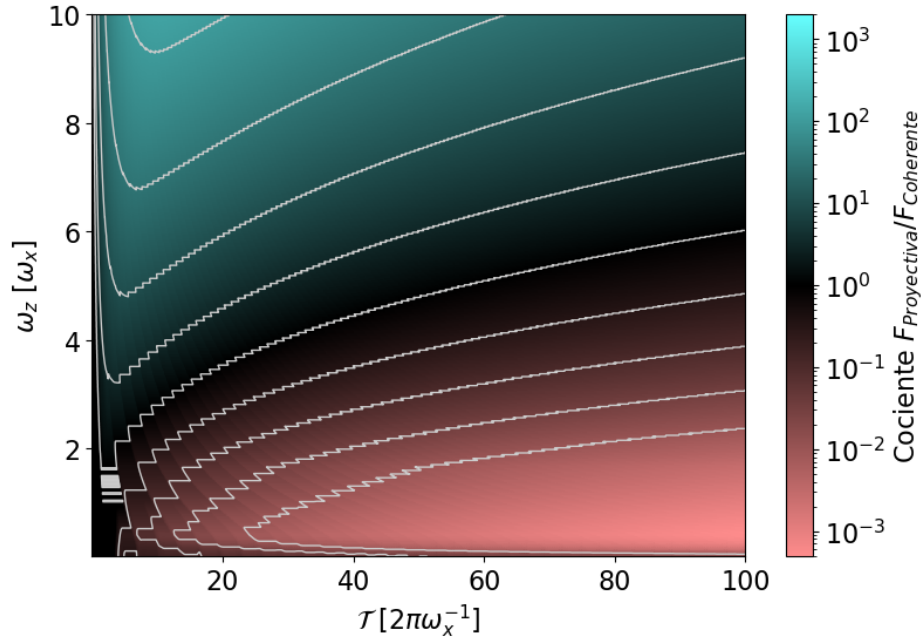


Figura 3.17: Cociente entre la máxima información de Fisher clásica obtenible durante un tiempo total de experimento \mathcal{T} para ambos controles, $F_{\text{Zenón}}$ bajo control proyectivo cada tiempo $\tau = T/2$ y $F_{\text{Coherente}}$ bajo control coherente, en función del offset ω_z y \mathcal{T} . Las líneas blancas marcan las superficies de nivel, e incluyen la superficie correspondiente a $F_{\text{Proyectiva}} = F_{\text{Coherente}}$.

Capítulo 4

Análisis de potenciales aplicaciones de la amplificación de información por Efecto Zenón Cuántico

En este capítulo presentaremos varios ejemplos que sirven de caso particular al desarrollo en el capítulo anterior.

Consideremos primero la familia de circunstancias en donde la dinámica de un sistema de N niveles se reduzca a M subsistemas de N_i ($i \in [1, M]$) niveles. En ese caso, tanto la QFI como la CFI de aquellos observables que dependan sólo de los estados de cada subsistema se reduce a la suma de la QFI y CFI de cada subsistema independiente. De modo que el análisis previo aplica, tras una identificación adecuada de los símbolos involucrados, a todos los subsistemas de 2 niveles.

4.1. Espín 1/2 como sensor de un campo magnético alterno fuera de resonancia

Consideremos al espín sensor conformado por un espín 1/2, con factor giromagnético γ en presencia de un campo magnético homogéneo constante denominado $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{z}$. Esta interacción Zeeman con el campo \mathbf{B}_0 genera el sistema de dos niveles, donde el espín precesa con la frecuencia de Larmor $\omega_0 = \gamma B_0$ alrededor del eje \mathbf{z} longitudinal al campo. Consideramos al espín sensor como un magnetómetro para estimar la intensidad de un campo magnético oscilante (alterno) denominado $\mathbf{B}_1 = 2B_1 \cos(\omega t) \mathbf{x}$

El campo \mathbf{B}_1 puede ser descompuesto en dos componentes de campo que rotan con velocidad angular ω en sentido antihorario (forward) y horario (backward), respectivamente, vistos desde el semieje positivo de \mathbf{z} : $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_1^f + \mathbf{B}_1^b$, donde \mathbf{B}_1^f y \mathbf{B}_1^b tienen módulo B_1 .

La contribución de \mathbf{B}_1^b a la dinámica del espín se hace despreciable cuando $B_0 \gg B_1$

y $\omega \approx \omega_0$, ya que su interacción se encuentra muy fuera de resonancia. La dinámica del espín resulta entonces dictada sólo por la componente \mathbf{B}_1^f que oscila con una frecuencia cercana a la de resonancia ω_0 . Cambiando a un sistema de referencia que rota con velocidad angular ω , llamado el “sistema rotante”, en este sistema la dinámica del espín está dada por la interacción con un campo magnético efectivo $(\omega_0 - \omega)/\gamma \mathbf{z} + B_1 \mathbf{x}$.

Este Hamiltoniano toma la forma del capítulo anterior, donde la intensidad del campo alterno es $\omega_x = \gamma B_1$ y el offset está dado por $\omega_z = \gamma B_0 - \omega$ que define qué tan lejos está el campo alterno de la condición de resonancia. Por tanto, el método desarrollado en este trabajo puede ser utilizado para estimar la intensidad del campo alterno, cuando éste se encuentra fuera de resonancia. Empleando la Ec. 3.61 como criterio aproximado, las mediciones proyectivas serán más convenientes para estimar la intensidad del campo alterno B_1 , sii el tiempo total \mathcal{T} satisface la inequidad

$$\mathcal{T} < 2e \frac{B_1^2 + (B_0 - \omega/\gamma)^2}{B_1^3} \quad (4.1)$$

Hay muchas situaciones experimentales donde ω y/o B_0 no pueden ser controlados para poner al sistema sensor en condición de resonancia. Un caso interesante es cuando el campo B_0 es un campo muy inhomogéneo, y tenemos un ensamble de espines sensores equivalentes que sienten distintos B_0 y la componente $(\omega_0 - \omega)/\gamma \mathbf{z}$ será en general no nula. Este último caso se da en resonancia magnética nuclear utilizando un imán denominado mouse que se coloca de forma lateral cerca de una superficie de estudio[23].

4.2. Estimación del acople entre dos espines interactuantes

Hay muchas situaciones experimentales donde es relevante estimar la interacción entre dos espines interactuantes. En particular dentro del campo de RMN, estas interacciones son útiles para la caracterización de estructuras moleculares ya que definen la distancia entre los núcleos o propiedades fisicoquímicas[24, 25]. Un caso de particular interés es el de la polarización cruzada[25, 26], que es una técnica útil para transferir magnetización de un sistema de alta abundancia y/o polarización (espín I), como es el caso del 1H , a un sistema de baja abundancia y/o factor giromagnético γ pequeño (espín S), como es el caso del ^{13}C .

Específicamente, las dos especies de espín están sometidas a un campo magnético estático B_0 como en el ejemplo anterior. La interacción Zeeman define las frecuencias de resonancias de cada espín $\omega_{0,I} = \gamma_I B_0$ y $\omega_{0,S} = \gamma_S B_0$ que son típicamente del orden de los cientos de MHz y difieren también en ese orden. La interacción dipolar entre los espines es del orden de los kHz, por lo que el intercambio de polarización/magnetización

entre ellos es completamente despreciable. Para generar el efecto de la polarización cruzada, a estos espines se los somete a dos campos magnéticos oscilatorios $\mathbf{B}_{1,I}$ y $\mathbf{B}_{1,S}$ de frecuencias ω_I y ω_S respectivamente. Las frecuencias ω_I y ω_S son elegidas para coincidir con las frecuencias de resonancia $\omega_i = \omega_{0,i}$ ($i = I, S$) de las respectivas especies, de modo que el campo de frecuencia ω_S queda fuera de resonancia con el espín I y viceversa, pudiéndose despreciar en comparación con el otro campo en resonancia. Para facilitar el intercambio de polarización entre los espines, es necesario ponerlos en resonancia mutuamente igualando $\gamma_I B_{1,I}$ con $\gamma_S B_{1,S}$, lo que se denomina condición de Hartmann-Hahn, de modo tal que la transferencia de polarización conserva la energía[26].

Este fenómeno, visto desde una terna doblemente rotante con las frecuencias $\omega_o = \omega_{0,i}$ ($i = I, S$) en las respectivas bases de operadores de espín, resulta descripto por el Hamiltoniano

$$H = -\hbar\Omega_{1,I}I^x - \hbar\Omega_{1,S}S^x + 2bS^zI^z, \quad (4.2)$$

donde $\Omega_{1,i} = \gamma_i B_i$, los operadores de espín $\mathbf{I} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_I$ y $\mathbf{S} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_S$, y

$$b = -\frac{1}{2} \left(\frac{\mu_0 \gamma_I \gamma_S \hbar^2}{4\pi r^3} \right) \frac{3r_x^2 - r^2}{r^2}, \quad (4.3)$$

es la interacción (acople) dipolar entre los espines, con γ_i el factor giromagnético de la especie i ($i = I, S$), y \mathbf{r} es el vector internuclear.

Consideraremos el regimen de alta potencia de los campos de radiofrecuencia

$$\hbar|\gamma_S B_{1,S} + \gamma_I B_{1,I}| \gg |b|. \quad (4.4)$$

Tras un renombre de los ejes ($x \rightarrow z$ y $z \rightarrow x$), el Hamiltoniano toma la forma

$$H = \frac{1}{2}(\Sigma - \Delta)S^z + \frac{1}{2}(\Sigma + \Delta)I^z + b(S^xI^x + S^yI^y), \quad (4.5)$$

$$\Sigma = -\hbar(\Omega_{1,S} + \Omega_{1,I}), \quad (4.6)$$

$$\Delta = \hbar(\Omega_{1,S} - \Omega_{1,I}), \quad (4.7)$$

donde sólo nos quedamos con la parte de la interacción dipolar que conmuta con el término $\frac{1}{2}\Sigma(S^z + I^z)$ denominada secular. Ya que el término descartado puede despreciarse si $\Sigma \gg b$. En la base producto $\mathcal{B} = \{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\} \otimes \{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$ ($\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_I$) el

Hamiltoniano toma la forma

$$[H]_{\mathcal{B}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \Sigma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\Delta & b & 0 \\ 0 & b & \Delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\Sigma \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

La muestra es polarizada inicialmente mediante la acción del campo estático $B_0 \mathbf{z}$. La polarización en la especie insensible S es despreciable, por lo que sólo la especie sensible I es polarizada a lo largo del eje \mathbf{z} según la distribución de Boltzmann para el equilibrio térmico. Para permitir la transferencia de polarización, esto es luego seguido de un pulso $\pi/2$, un pulso electromagnético de corta duración a lo largo de un eje perpendicular a \mathbf{z} cuya función es llevar la polarización hacia el dicho plano. Dentro de la terna doblemente rotante, esta condición inicial está dada por

$$\rho_0 = \frac{\exp\left(-\frac{\hbar\Omega_{0,I}I_z}{kT}\right)}{\text{Tr}\left\{\exp\left(-\frac{\hbar\Omega_{0,I}I_z}{kT}\right)\right\}} \quad (4.9)$$

$$= \frac{1}{4 \cosh\left(\frac{1}{2} \frac{\hbar\Omega_{0,I}}{kT}\right)} \quad (4.10)$$

$$\left(\exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\hbar\Omega_{0,I}}{kT}\right) (|\uparrow\uparrow\rangle\langle\uparrow\uparrow| + |\downarrow\downarrow\rangle\langle\downarrow\downarrow|) + \right. \quad (4.11)$$

$$\left. \exp\left(\frac{1}{2} \frac{\hbar\Omega_{0,I}}{kT}\right) (|\uparrow\downarrow\rangle\langle\uparrow\downarrow| + |\downarrow\uparrow\rangle\langle\downarrow\uparrow|) \right) \quad (4.12)$$

que, por ser función de I_z es diagonal en \mathcal{B} . De este modo, la evolución de los espines toma lugar de a bloques. Los bloques de los espacios $\{\uparrow\uparrow\}$ y $\{\downarrow\downarrow\}$ no generan dinámica en el sistema, siendo su componente estática en función del tiempo. La dinámica se genera en el espacio $\{\uparrow\downarrow, \downarrow\uparrow\}$, sujeta a una evolución dictada por el Hamiltoniano

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\Delta & b \\ b & \Delta \end{pmatrix}. \quad (4.13)$$

Este Hamiltoniano es entonces equivalente al considerado en el capítulo anterior, ya que los bloques de los espacios $\{\uparrow\uparrow\}$ y $\{\downarrow\downarrow\}$ son estáticos, no aportarán a la QFI ni a la CFI total de ningún parámetro. El bloque del espacio $\{\uparrow\downarrow, \downarrow\uparrow\}$ dado por

$$-\frac{1}{2}\Delta (|\uparrow\downarrow\rangle\langle\uparrow\downarrow| - |\downarrow\uparrow\rangle\langle\downarrow\uparrow|) + \frac{1}{2}b (|\uparrow\downarrow\rangle\langle\downarrow\uparrow| + |\downarrow\uparrow\rangle\langle\uparrow\downarrow|) \quad (4.14)$$

introduce una probabilidad no nula de transición entre los estados $|\uparrow\downarrow\rangle$ y $|\downarrow\uparrow\rangle$ mediante el acople b , con una separación de energía de Δ . Esto induce una transferencia de

magnetización, donde si idealmente $\Delta = 0$, la transferencia es completa, pero la presencia de un valor no nulo atenúa la amplitud de las oscilaciones de intercambio de magnetización. En este espacio de dos niveles, cuya traza es $\frac{1}{2}$, el vector polarización queda definido por

$$\rho_b = \frac{1}{4} [\mathbb{I}_b + \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}_b], \quad (4.15)$$

donde el subíndice b indica que los operadores actúan sobre el subespacio generado por $\{|\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle\}$. La condición inicial vale

$$\mathbf{p}_0 = \left(\frac{\exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\hbar\Omega_{0,I}}{kT}\right)}{\cosh\left(-\frac{1}{2} \frac{\hbar\Omega_{0,I}}{kT}\right)} - 1 \right) \mathbf{z} \quad (4.16)$$

$$\approx -\frac{1}{2} \frac{\hbar\Omega_{0,I}}{kT} \mathbf{z}, \quad (4.17)$$

donde esta última aproximación corresponde al régimen de altas temperaturas[24].

Considerando que este vector precesará con velocidad angular

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{\hbar}(-b, 0, \Delta), \quad (4.18)$$

su componente z tomará la forma

$$\mathbf{p}_z(t) = \frac{1}{2} \mathbf{p}_0 \frac{\Delta^2 + b^2 \cos(\sqrt{b^2 + \Delta^2}t)}{\Delta^2 + b^2} \quad (4.19)$$

$$\approx -\frac{1}{4} \frac{\hbar\Omega_{0,I}}{kT} \frac{\Delta^2 + b^2 \cos(\sqrt{b^2 + \Delta^2}t)}{\Delta^2 + b^2}. \quad (4.20)$$

La magnetización total puede obtenerse mediante

$$M_{I^z}(t) = \text{Tr}[\rho I^z] \quad (4.21)$$

$$- \approx \frac{1}{4} \frac{\hbar\Omega_{0,I}}{kT} \left(1 + \frac{\Delta^2 + b^2 \cos(\sqrt{b^2 + \Delta^2}t)}{\Delta^2 + b^2} \right). \quad (4.22)$$

Se puede ver que la amplitud del intercambio de magnetización está dada con el factor

$$\frac{b^2}{\Delta^2 + b^2}, \quad (4.23)$$

de modo que un distanciamiento de la condición de Hartmann-Hahn, dada por

$$\Delta = \Omega_{1,S} - \Omega_{1,I} \quad (4.24)$$

disminuye la calidad de la estimación durante una estimación basada en la evolución

libre del sistema. Si este offset Δ es muy grande, la superficie para estimar más eficientemente con mediciones proyectivas estará determinada por

$$\mathcal{T} < 2e \frac{b^2 + \Delta^2}{b^3} = 2e \frac{b^2 + \hbar^2 (\Omega_{1,S} - \Omega_{1,I})^2}{b^3}. \quad (4.25)$$

La imposibilidad de generar la condición de Hartmann-Hahn se da en muchas situaciones experimentales, en particular en el caso de espectros muy complejos, donde existen ensambles de espines con distintas frecuencias de resonancia como es el caso de sistemas en estado sólido con muestras policristalinas[27–29]. En este caso, será conveniente utilizar el método de estimación utilizando mediciones proyectivas que pueden ser implementadas con gradientes como se muestra en este trabajo[16]. Independientemente de elegir la forma óptima para estimar el acople entre los espines, trabajando en el regimen QZE utilizando mediciones proyectivas, nos permite estimar el acople sin necesidad de conocer el offset de la condición de Hartmann-Hahn, lo cual es una gran ventaja en estos sistemas complejos.

4.3. Estimación de acoples en un sistema de tres espines

Consideramos ahora la extensión del experimento de polarización a un sistema de tres espines, ahora constituido por un espín S y dos espines I , representando por ejemplo un átomo de ^{13}C y dos protones $^1\text{H}^+$. Nuevamente se encuentra en presencia de un campo estático B_0 en la dirección z y campos de radiofrecuencia $B_{1,I}$ y $B_{1,S}$ en la dirección x . Si bien consideramos este caso específico de polarización cruzada, estos resultados son generales para sistemas de espines interactuantes donde se necesita estimar los acoples, por ejemplo para determinar el Hamiltoniano del sistema.

Los acoples dipolares, entre el protón k y el carbono son

$$b_k = -\frac{1}{2} \left(\frac{\mu_0 \gamma_I \gamma_S \hbar^2}{4\pi r_{(k)}^3} \right) \frac{3r_{(k)x}^2 - r_{(k)}^2}{r_{(k)}^2}, \quad k = 1, 2, \quad (4.26)$$

Y el acople entre los protones

$$d = -\frac{1}{2} \left(\frac{\mu_0 \gamma_I^2 \hbar^2}{4\pi r^3} \right) \frac{3r_x^2 - r^2}{r^2}. \quad (4.27)$$

De forma similar al caso anterior, el Hamiltoniano en el doble sistema rotante preserva la magnetización total del sistema a lo largo de las respectivas direcciones de los campos de radiofrecuencia, de modo que nuevamente adquiere una estructura en bloques donde $M = M_I + M_S$, $M_I = M_1 + M_2$, es constante, generando transiciones

solamente entre los estados de la forma $\{|M_I, M_S\rangle\}$ y $\{|M_I \pm 1, M_S \mp 1\rangle\}$.

Específicamente, denotando

$$|S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+, -\rangle + |-, +\rangle), \quad (4.28)$$

$$|A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+, -\rangle - |-, +\rangle), \quad (4.29)$$

a las combinaciones simétricas y antisimétricas de los estados de los protones, en la base

$$\{|S\rangle \otimes |+\rangle, |+, +\rangle \otimes |-\rangle, |A\rangle \otimes |+\rangle\} \quad (4.30)$$

obtenemos el Hamiltoniano para el bloque $M = \frac{1}{2}$ de la forma

$$[H] = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(\Sigma - \Delta) + \frac{1}{2}d & \frac{\sqrt{2}}{8}(b_1 + b_2) & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{8}(b_1 + b_2) & (\frac{1}{4}\Sigma + \frac{3}{4}\Delta) - \frac{1}{4}d & \frac{\sqrt{2}}{8}(b_2 - b_1) \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{8}(b_2 - b_1) & \frac{1}{4}(\Sigma - \Delta) \end{pmatrix}. \quad (4.31)$$

Hay varias situaciones donde se dan las condiciones $b_1 = b_2 = b$ o $b_1 = -b_2 = b$, como es el caso determinado por las simetrías de los cristales líquidos nCB[30]. Consideremos el caso $b_1 = b_2$ donde vemos que las transiciones entre $|+, +\rangle \otimes |-\rangle$ y $|A\rangle \otimes |+\rangle$ se anulan. En este caso, tendremos entonces una dinámica sólo entre dos niveles dictada por el Hamiltoniano

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4}(\Sigma - \Delta) + \frac{1}{2}d & \frac{\sqrt{2}}{4}b \\ \frac{\sqrt{2}}{4}b & (\frac{1}{4}\Sigma + \frac{3}{4}\Delta) - \frac{1}{4}d \end{pmatrix}, \quad (4.32)$$

que, salvo una componente constante, corresponde a un Hamiltoniano como el utilizado en el capítulo anterior. Aquí, $\omega_x = -\frac{\sqrt{2}}{2}b$ depende del acople dipolar entre los protones y el carbono y $\omega_z = \frac{1}{2}\Delta - \frac{3}{8}d$ hace función del offset. En el caso $b_1 = -b_2$ se obtiene exactamente el mismo resultado, al igual que ocurre con el bloque $M = -\frac{1}{2}$. Nuevamente en este caso podemos hacer uso del método desarrollado en esta tesis para estimar el acople dipolar b cuando la interacción entre los protones es grande, o si no la sabemos y queremos estimar al acople b independientemente del conocimiento de d .

4.4. Estimación de acoples en sistemas de muchos espines interactuantes

Las propiedades generales que nos permiten esperar los comportamientos anteriores no son dependientes del detalle de la dinámica. En analogía con el caso de sistemas de

dos niveles, la estimación coherente y la estimación proyectiva son definidas principalmente por los sumandos segundo y primero de la Ec. 2.42 relativamente. La estimación coherente presentará entonces una QFI que, en términos generales, evolucionará con el cuadrado del producto entre el tiempo y un factor dependiente de los parámetros. Similarmente, la QFI para la evolución proyectiva corresponde a la de un decaimiento exponencial, cuyas curvas óptimas se esperan sean aproximadas por una proporcional al tiempo característico. En general, los valores de parámetros en los que será aprovechable el QZE serán aquellos que disminuyan la amplitud de transición entre los estados relevantes. Sin embargo, una gran ventaja es que la dependencia de la dinámica con los parámetros es además simplificada por el QZE[17]. Esto entonces facilita la estimación de acoples entre espines para determinar la red de interacciones de un sistema de espines de muchos cuerpos, ya que la evolución coherente es en general muy compleja y difícil de utilizar de forma práctica para determinar toda la estructura de acoples. Este fenómeno podemos verlo al considerar la expansión de Trotter-Suzuki para determinar la dinámica cuántica a tiempos cortos. Consideremos el Hamiltoniano de interacción isotrópica

$$H = \sum_i \omega_i^z I_i^z + \sum_{i < j} b_{ij} \mathbf{I}_i \cdot \mathbf{I}_j, \quad (4.33)$$

donde i indexa los espines de la red y b_{ij} representa la interacción entre los espines i y j . El operador evolución puede ser aproximado a tiempos cortos por

$$U(t) = e^{-iHt/\hbar} \approx \prod_i e^{-i\omega_i^z I_i^z} \prod_{i < j} e^{-ib_{ij} \mathbf{I}_i \cdot \mathbf{I}_j}. \quad (4.34)$$

Si la condición inicial está dada por $\rho(0) = 1 + \delta p I_i^z$, su evolución cuántica estará determinada por la evolución del operador I_i^z . En evolución a tiempos cortos $t \ll b_{ij}$, ω_i^z está dada por[17]

$$I_i^z \rightarrow I_i^z \left(1 - \frac{b_{ij}^2 t^2}{8} \right) + \sum_{j \neq i} I_j^z \frac{b_{ij}^2 t^2}{8} + \mathcal{O}, \quad (4.35)$$

donde \mathcal{O} representa órdenes más altos en el tiempo, y términos no observables por proyecciones en los operadores I_i^z . La dinámica cuántica observada en el espín excitado inicialmente $\text{Tr}[\rho(t) I_i^z]$ puede ser mapeada a un espín central i acoplado a los demás espines j con acoples homogéneos, donde el acople efectivo está dado por $b = \sqrt{\frac{1}{N} \sum b_{ij}^2}$ con N el número de espines[31]. Por otro lado, los espines j pueden ser decimados a un espín único siguiendo el protocolo desarrollado en la Ref. [32]. Por lo que hemos mapeado la evolución de esta dinámica cuántica a un sistema efectivo de dos espines acoplados con la interacción b , y por ende podemos seguir el protocolo desarrollado en

este trabajo como discutimos en la Sec. 4.2. De esta manera, esta tesis de maestría provee las herramientas para estimar de forma óptima con el QZE la red de espines interactuantes siguiendo el método propuesto en Ref. [17].

4.5. Decoherencia inducida como método de proyección

En esta sección evaluaremos el rol de un ambiente del sensor como aparato de medición para realizar las mediciones proyectivas. En toda situación experimental, el sistema no se encuentra perfectamente aislado, sino que se haya en constante interacción con el ambiente. Por ejemplo, en Resonancia Magnética Nuclear, es esta misma decoherencia la que limita los tiempos de experimento debido a la relajación de la señal de los espines con tiempos característicos T_1 y T_2 . Sin embargo, este mismo fenómeno puede ser aprovechado para generar las mediciones proyectivas que son utilizadas como recurso a lo largo de este trabajo. En esta sección, veremos cómo una perturbación estocástica a lo largo de la componente σ_z del espín-sensor produce un decaimiento de las coherencias, induciendo una proyección parcial. Veremos cómo en el límite de bajos tiempos de correlación esta decoherencia se reduce a las mediciones proyectivas empleadas previamente.

Analizaremos también la posibilidad de utilizar proyecciones parciales como recurso para estimaciones menos invasivas, donde la polarización es reducida sólo parcialmente. Esta clase de experimentos podría corresponderse a circunstancias donde no es deseable destruir el estado cuántico completamente, y podría permitir, provisto suficiente tiempo, realizar mediciones con buena precisión aun bajo dicha restricción.

Consideramos un sistema que evoluciona durante un intervalo de tiempo τ_c con un Hamiltoniano estático $\frac{1}{2}\omega_c\sigma_x$ seguido de un intervalo de tiempo τ_a con un Hamiltoniano con un término estocástico $\frac{1}{2}\omega(t)\sigma_z$, representando la interacción con un ambiente con ω un proceso estocástico. Esta concatenación de evoluciones se repite periódicamente. Consideraremos ω como el campo proveniente de un ambiente, regido por correlaciones de Ornstein-Uhlenbeck. Específicamente,

$$H(t) = \frac{1}{2}\omega_c\chi_{S_c}(t)\sigma_x + \frac{1}{2}\chi_{S_a}(t)\omega(t)\sigma_z, \quad (4.36)$$

donde $\chi_S(t)$ es 1 o 0 según $t \in S$ o $t \notin S$, $S_c = \cup_k [k\tau, k\tau + \tau_c)$ y $S_a = \cup_k [(k+1)\tau - \tau_a, (k+1)\tau)$, $\tau = \tau_c + \tau_a$.

Consideramos al igual que en el desarrollo del capítulo anterior la matriz densidad en términos de su vector polarización $\rho = \frac{1}{2}[\mathbf{I} + \mathbf{p}]$, con condición inicial $\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}_0\mathbf{z}$. Durante el tiempo τ_c éste se verá sometido a una rotación con velocidad angular $\omega_c\mathbf{x}$,

es decir

$$\mathbf{p}(n\tau + \tau_c) = \mathbf{R}[\omega_c \tau_c \mathbf{x}] \mathbf{p}(n\tau), \quad (4.37)$$

$$\mathbf{R}[\theta \mathbf{x}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (4.38)$$

Luego, para entender la evolución durante el siguiente intervalo τ_a , consideramos una realización de ω y promediaremos respecto de las realizaciones. El efecto a lo largo de una realización es el de rotarlo a lo largo del eje z con velocidad angular instantánea $\omega(t)$, de modo que

$$\mathbf{p}((n+1)\tau) = \mathbf{R} \left[\int_{(n+1)\tau - \tau_a}^{(n+1)\tau} ds \omega(s) \mathbf{z} \right] \mathbf{p}((n+1)\tau - \tau_a), \quad (4.39)$$

$$\mathbf{R}[\theta \mathbf{z}] = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.40)$$

Para realizar el promedio, consideramos que el ruido de Ornstein-Uhlenbeck es Gaussiano, y por lo tanto satisface la propiedad

$$\left[\exp \left(i \int_{t'}^t ds f(s) \omega(s) \right) \right]_{\omega} = \left[\exp \left(-i \int_{t'}^t ds f(s) \omega(s) \right) \right]_{\omega} \quad (4.41)$$

$$= \exp \left(-\frac{1}{2} \int_{t'}^t \int_{t'}^t ds ds' f(s) K(s, s') f(s') \right), \quad (4.42)$$

donde $\llbracket \cdot \rrbracket_{\omega}$ representa el promediado sobre realizaciones de ω y $K(s, s')$ es la función de autocorrelación. Considerando además que se trata de un ruido estacionario, tendremos $K(s, s') = K(s - s')$. Esto implica que

$$\left[\sin \left(\int_{t'}^t ds \omega(s) \right) \right]_{\omega} = 0, \quad (4.43)$$

$$\left[\cos \left(\int_{t'}^t ds \omega(s) \right) \right]_{\omega} = \exp(-2\beta(t - t')) \quad (4.44)$$

$$:= \xi(t - t'), \quad (4.45)$$

$$\beta(t - t') := \frac{1}{4} \int_{t'}^t \int_{t'}^t ds ds' K(s - s'). \quad (4.46)$$

Tendremos entonces que

$$[\mathbf{p}((n+1)\tau)]_\omega = \left[\mathbf{R} \left[\int_{(n+1)\tau-\tau_a}^{(n+1)\tau} ds \omega(s) \mathbf{z} \right] \mathbf{p}((n+1)\tau - \tau_a) \right]_\omega \quad (4.47)$$

$$= \left[\mathbf{R} \left[\int_{(n+1)\tau-\tau_a}^{(n+1)\tau} ds \omega(s) \mathbf{z} \right] \right]_\omega \mathbf{p}((n+1)\tau - \tau_a) \quad (4.48)$$

$$= \Xi(\tau_a) \mathbf{p}((n+1)\tau - \tau_a), \quad (4.49)$$

$$\Xi(t) := \begin{pmatrix} \xi(t) & 0 & 0 \\ 0 & \xi(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.50)$$

El efecto neto de la interacción con el ambiente es entonces el de la reducción de las componentes perpendiculares a \mathbf{z} por un factor $\xi(\tau_a)$. El efecto neto a lo largo de un ciclo τ sobre el vector polarización está descrito por la transformación

$$\Lambda(\tau_c, \tau_a) = \Xi(\tau_a) \mathbf{R}[\omega_c \tau_c \mathbf{x}] \quad (4.51)$$

$$= \begin{pmatrix} \xi(\tau_a) & 0 & 0 \\ 0 & \xi(\tau_a) \cos(\omega_c \tau_c) & -\xi(\tau_a) \sin(\omega_c \tau_c) \\ 0 & \sin(\omega_c \tau_c) & \cos(\omega_c \tau_c) \end{pmatrix}. \quad (4.52)$$

La dinámica queda separada en dos efectos independientes: una reducción en un factor τ_a de la componente x , y una combinación de la rotación y la proyección en las componentes y y z , dada por la matriz

$$\Lambda_{yz}(\tau_c, \tau_a) = \begin{pmatrix} \xi(\tau_a) \cos(\omega_c \tau_c) & -\xi(\tau_a) \sin(\omega_c \tau_c) \\ \sin(\omega_c \tau_c) & \cos(\omega_c \tau_c) \end{pmatrix}. \quad (4.53)$$

Consideramos ahora la forma particular de β para el ruido de Ornstein-Uhlenbeck, donde

$$\beta(\tau_a) = \frac{\Gamma}{\gamma} (\gamma \tau_a + e^{-\gamma \tau_a} - 1), \quad (4.54)$$

con γ es un parámetro del baño inversamente proporcional al tiempo de correlación, y Γ es la tasa de decaimiento a tiempos grandes. Bajo la condición $\gamma \tau_a \gg 1$, es decir que el tiempo de correlación es pequeño o el tiempo de interacción con el ambiente es grande, tendremos que $\beta(\tau_a) \approx \Gamma \tau_a$, y así $\xi(\tau_a) \approx e^{-2\Gamma \tau_a}$ se acerca a 0 exponencialmente, en la medida que τ_a crece. **Recuperamos así el efecto de las mediciones proyectivas.**

La posibilidad de realizar proyecciones parciales mediadas por un factor ξ introduce al proceso de estimación un nuevo grado de libertad. Evaluamos entonces el efecto sobre el vector polarización de un protocolo con proyecciones parciales, presentando ar-

gumentos heurísticos respecto a los resultados que se esperarían a partir de un análisis analítico. Observaremos una transición de fase en la que el sistema pasa de un decaimiento exponencial hacia un decaimiento espiralado en la medida que ξ atravieza un valor crítico ξ_c . Omitimos a partir de ahora la dependencia funcional de las constantes ξ y β con τ_a y las funciones Λ y Λ_{yz} .

A modo de evaluar la evolución tras n de estos ciclos de evolución, resolvemos el problema de autovectores de Λ_{yz} , obteniendo

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left[(\xi + 1) \cos(\omega_c \tau_c) \pm \sqrt{(\xi - 1)^2 - (\xi + 1)^2 \sin^2(\omega_c \tau_c)} \right]. \quad (4.55)$$

Estos autovalores serán reales sii $(\xi - 1)^2 - (\xi + 1)^2 \sin^2(\omega_c \tau_c) \geq 0$. Es decir que tendremos un punto crítico en

$$\left| \frac{\xi_c - 1}{\xi_c + 1} \right| = |\sin(\omega_c \tau_c)|. \quad (4.56)$$

Considerando que ξ cuantifica la intensidad de la interacción con el ambiente, y $\omega_c \tau_c$ la intensidad del efecto de la interacción con el campo coherente, esta ecuación representa la intercorrelación entre ellos. Si la decoherencia inducida por el ambiente es suficientemente fuerte en comparación con el campo coherente, los autovalores serán reales y tendremos un decaimiento puramente exponencial, mientras que, caso contrario, tendremos un decaimiento espiralado.

4.5.1. Decaimiento exponencial puro

Este caso corresponde a $\xi \leq \xi_c$ en la Ec. 4.56. Los autovalores tomarán la forma de la Eq. 4.55, con $\sqrt{\dots}$ real. En el extremo $\xi = 0$, tendremos $\lambda_+ = \cos(\omega_c \tau)$ y $\lambda_- = 0$, correspondiendo a los ejes **y** y **z** respectivamente. Para valores de ξ cercanos a 0 tendremos un comportamiento similar. El decaimiento será a lo largo de un par de ejes con un factor cercano a 0, y otro cercano a $\cos(\omega_c \tau_c)$ que corresponderá al eje sobre el que decaerá el vector.

En la medida en que ξ se acerque a ξ_c los autovalores se aproximarán al valor

$$\lambda_+ = \lambda_- = \frac{1}{2} (\xi_c + 1) \cos(\omega_c \tau), \quad (4.57)$$

y los correspondientes autovectores convergerán al mismo autovector

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4} (\xi_c + 1)^2 \cos^2(\omega_c \tau_c) + \sin^2(\omega_c \tau_c)}} \left(\frac{1}{2} (\xi_c + 1) \cos(\omega_c \tau_c), \sin(\omega_c \tau_c) \right), \quad (4.58)$$

que resultará nuevamente en un decaimiento exponencial, ahora respecto de dicho eje,

partiendo de una polarización inicial a lo largo del eje \mathbf{z} .

4.5.2. Decaimiento espiralado

Aquí $\xi > \xi_c$ en la Ec. 4.56. Los autovalores tomarán la forma

$$\frac{1}{2} \left[(\xi + 1) \cos(\omega_c \tau_c) \pm i \sqrt{(\xi + 1)^2 \sin^2(\omega_c \tau_c) - (\xi - 1)^2} \right], \quad (4.59)$$

siendo conjugados complejos, y de módulo ξ . Las coordenadas respecto de los auto-vectores serán multiplicadas por λ_{\pm} tras cada iteración, de modo que el módulo de \mathbf{p} tomará la forma

$$\mathbf{p}(n\tau) = \mathbf{p}_0 \xi^n, \quad (4.60)$$

y el argumento de ellas oscilará como $\lambda_{\pm}^n = \lambda_{\pm}^{t/\tau}$, es decir, con frecuencia

$$\omega = \frac{1}{\tau} \arg \lambda_+. \quad (4.61)$$

Obtenemos así el tiempo característico

$$T_c = -\frac{\tau}{\log |\lambda_{\pm}|} \quad (4.62)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\tau}{\beta}, \quad (4.63)$$

y la frecuencia de rotación

$$\omega = \frac{1}{\tau} \operatorname{atan} \left(\sqrt{\frac{\sin^2(\omega_c \tau_c) - \tanh^2(\beta)}{\cos^2(\omega_c \tau_c)}} \right). \quad (4.64)$$

Esta frecuencia parte desde 0 cuando $\xi = \xi_c$, y tiende a $\omega_c \tau_c / \tau$ cuando $\xi \rightarrow 1$.

Para demostrar esto último recordamos que $\xi = e^{-2\beta}$, de modo que $\xi \rightarrow 1 \Rightarrow \beta \rightarrow 0$, con lo que $\tanh^2(\beta) \approx \beta$ y obtendremos, a segundo orden,

$$\omega = \omega_c \frac{\tau_c}{\tau} - \frac{1}{2\tau} \cotg(\omega_c \tau_c) \beta^2. \quad (4.65)$$

Es decir, se aproxima cuadráticamente a la frecuencia angular natural ω_c , contemplando que esta sólo actúa una fracción τ_c/τ del tiempo.

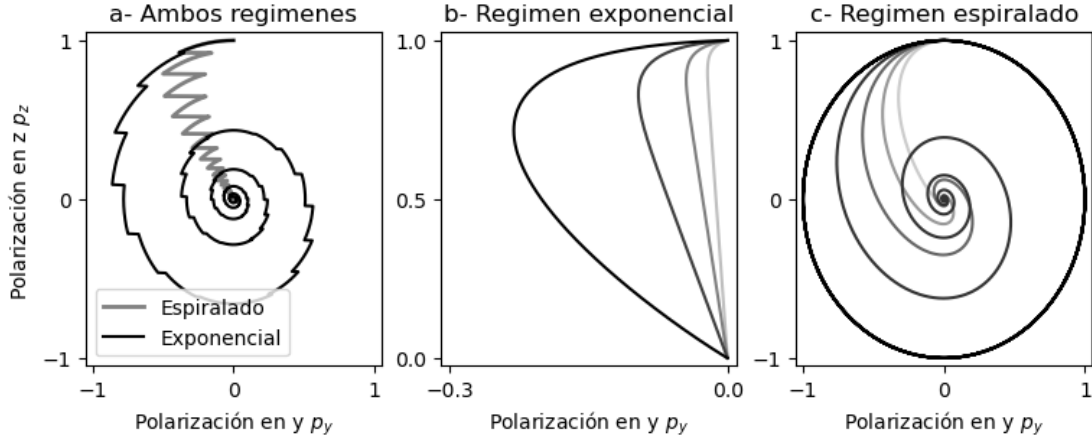


Figura 4.1: Evolución del vector polarización como función del tiempo para distintos valores de los parámetros $\omega_c \tau_c$ y ξ . En (a) se muestran las trayectorias exactas, para un decaimiento exponencial y un decaimiento espiralado. En (b) y (c) las trayectorias son aproximadas por k continuo para distintos valores de parámetros en regimen exponencial (b) y espiralado (c). Las curvas varían de forma continua en función de la relación entre $\omega_c \tau_c$ y ξ . Los valores empleados son $\omega_c \tau_c = 0,4$ en todos los casos, y: (a) $\xi : 0,4, 0,9$, (b) $\xi \in \{2^i \xi_c\}_{i \in [-3, 0]_{\mathbb{Z}}}$, (c) $\xi \in \{i(1 - \xi_c)/5 + \xi_c\}_{i \in [1, 5]_{\mathbb{Z}}}$. Los valores más altos de ξ son representados con color más oscuro.

4.5.3. Análisis de la información extraíble

La Fig. 4.1 muestra las trayectorias para los distintos regimenes. En todos los casos tendremos ahora un decaimiento exponencial, donde se verán involucrados tres factores que determinan la forma cualitativa de la información respecto del tiempo. El decaimiento de la polarización inducirá un factor decreciente con el tiempo, mientras que las diferencias de tanto ω_c como de γ o Γ , introducirán una diferencia tanto en el módulo de los autovalores como en la dirección de los autovectores. Esto causará no sólo una diferencia entre las trayectorias sino también en la velocidad con la que estas son recorridas.

Para entender cómo varía la información extraíble para la estimación de parámetros según los parámetros que describen la dinámica, nuevamente nos basaremos en la distancia descrita por la métrica de la Ec. 2.44. Esta ecuación depende de un desplazamiento dx^2 en el parámetro de interés, que puede ser tanto ω_c , como los parámetros del baño γ y Γ . La Fig. 4.2 muestra la diferencia inducida por una variación en ξ sobre dos trayectorias, una con decaimiento exponencial y otra con decaimiento espiralado. Las diferencias introducidas por variaciones en $\omega_c \tau_c$ poseen las mismas propiedades cualitativas.

En ambos casos, por haber una reducción en la polarización, tendremos una dependencia en el tiempo similar a la observada en el caso de mediciones proyectivas ideales descritas en el capítulo anterior. La información del parámetro a estimar será nula tanto al principio como a tiempos largos, poseyendo un máximo en un tiempo intermedio. Como se vio en las subsecciones anteriores, la interacción con el ambien-

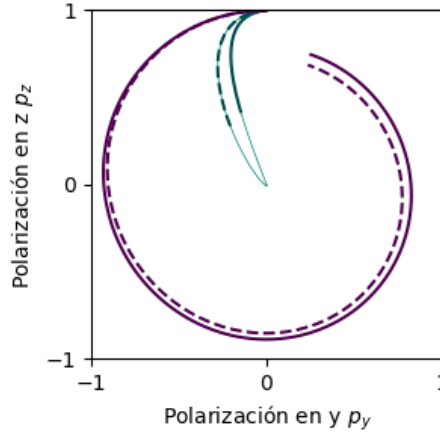


Figura 4.2: Trayectorias hasta tiempo finito (líneas macisas) junto con una trayectoria correspondiente a una variación pequeña de parámetros (líneas ralladas), para decaimiento exponencial (celeste) y decaimiento espiralado (violeta). Se observan tanto en la velocidad radial como en la velocidad angular. Los valores de parámetros empleados fueron $\omega_c \tau_c = 0,4$ en todos los casos, y $(\xi, d\xi) = (0,4, 0,1)$ en el regimen exponencial y $(\xi, d\xi) = (0,97, -0,01)$ en el regimen espiralado. Se observa que una diferencia minúscula en ξ fue magnificada en el caso espiralado, hasta ser comparable con la diferencia en el caso exponencial correspondiente al decaimiento exponencial.

te ξ modifica la tasa de decaimiento como también la frecuencia de oscilación. Por este motivo, provisto que el decaimiento sea lo suficientemente leve, se espera un factor creciente en el tiempo, con la ventaja de que la polarización no fue reducida tan significativamente.

La Fig. 4.3 muestra la QFI para la estimación de ω_c como función del tiempo para distintos valores del factor de decaimiento ξ y la cantidad de períodos transcurridos. Es importante destacar que este gráfico está en función de los períodos. Cuando se lo grafica como función del tiempo, y el parámetro ξ se modifica a través de cambios de τ_a , este gráfico es escalado en el eje del tiempo por un factor monótonamente creciente de ξ . El límite superior para $\xi = 0,9$ se eligió para evitar saturar la escala.

Se observa en la figura un decrecimiento de la información desde el caso $\xi = 1$ (evolución coherente) al caso $\xi = 0$ (evolución proyectiva), consistentemente con lo observado en la sección anterior. Éste mecanismo es una alternativa experimental para implementar las mediciones proyectivas para estimar ω_c en los casos que se han descripto en esta tesis.

La Fig. 4.4 muestra la QFI para la estimación de ξ , considerando a tal como parámetro independiente, tomando $\tau = \tau_a + \tau_c$ como constante. Los límites de ξ entre 0,2 y 0,8 fueron elegidos para evitar la saturación producida al incluir valores de ξ cercanos a 1. Se observa que, fijado el tiempo de medición t , la QFI es creciente respecto de ξ , reflejando el hecho de que $\xi = 1$ corresponde a un comportamiento oscilatorio usual. No se observan saltos cualitativos en el comportamiento al atravesar ξ_c , ya que la variación de las curvas respecto de éste es suave.

El caso de la estimación de un parámetro s incorporado dentro de ξ , la aplicación

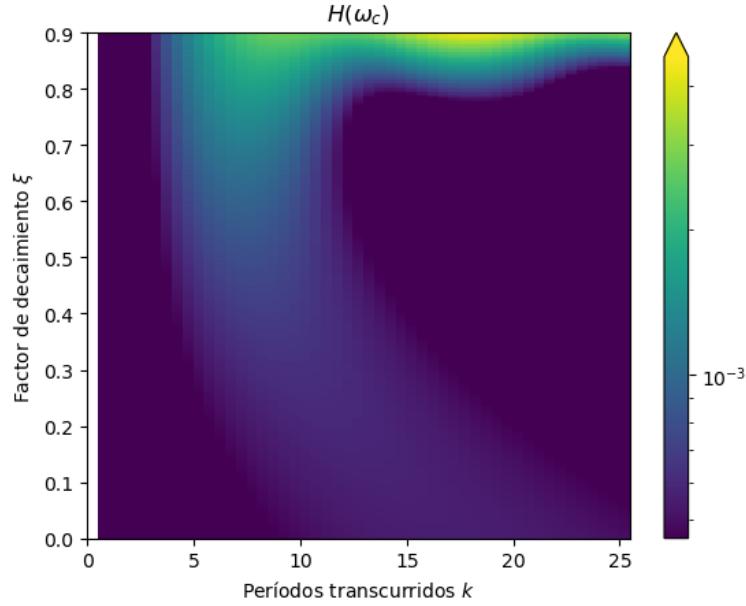


Figura 4.3: QFI de ω_c como función del factor de decaimiento ξ y la cantidad de períodos transcurridos k .

de la regla de la cadena permite obtener $H(s)$ como $(\partial_s \xi)^2 H(\xi)$. Esta incorporación de la sensibilidad de ξ respecto de el parámetro se reflejará en el gráfico como un factor dependiente de ξ e independiente del tiempo. Si consideramos por ejemplo la estimación de γ dentro del ruido de Ornstein-Uhlenbeck previamente introducido, vemos que este factor se anula para $\gamma \approx 0$, de modo que la información es anulada en el extremo $\xi = 1$, pero no así para valores menores, donde podremos encontrar circunstancias favorables.

Encontramos entonces que la estimación de ξ a través de la oscilación atenuada es factible, y en principio conveniente frente a la estimación mediante un decaimiento exponencial puro.

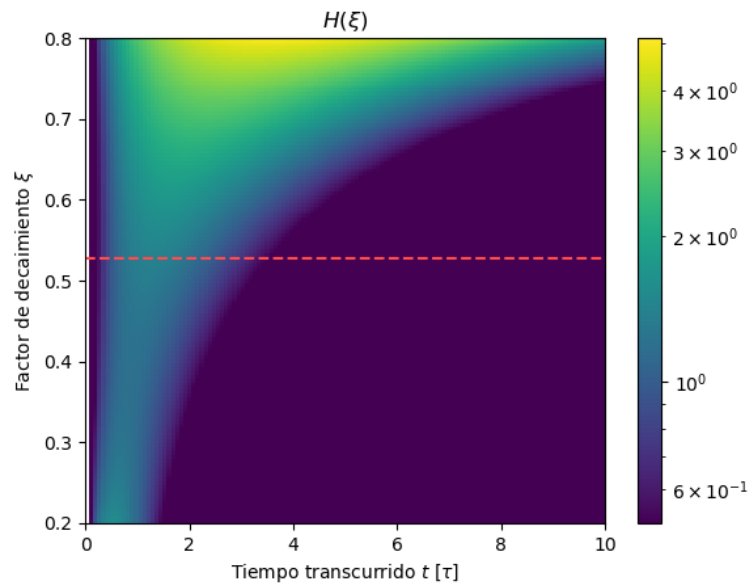


Figura 4.4: QFI de ξ como función del factor de decaimiento ξ y el tiempo transcurrido t en unidades de τ (fijo), para valores $\omega_c \tau_c = 0,1$, $\tau_a = \tau_c$, y $\mathbf{p}_0 = 1$. La línea punteada indica el valor crítico $\xi_c \approx 0,53$.

Capítulo 5

Conclusiones y resultados

En este trabajo consideramos la utilización de un sistema de dos niveles como sensor cuántico del acople ω_x entre los dos niveles definidos por el eje de cuantización, bajo los efectos de dos esquemas de control diferentes. El primer esquema (Sec. 3.1), denominado *control coherente*, consiste en permitir la evolución coherente libre, y obtener la información a partir de la variación de la fase del qubit sensor. El segundo (Sec. 3.2), denominado *control proyectivo*, aplica mediciones proyectivas estroboscópicas sobre los autoestados de una componente del operador de espín σ cada tiempo τ para afectar la evolución del sistema. El efecto de estas mediciones proyectivas es el de reducir la coherencia del sistema, causando un decaimiento exponencial de donde se puede extraer la información. Implementamos herramientas de teoría de la información para cuantificar la eficiencia en la estimación de parámetros, en particular la Información de Fisher Clásica $F(\omega_x)$ e Información de Fisher Cuántica $H(\omega_x)$. Junto con la cota de Cramér-Rao (Ec. 3.13) y el teorema de Fisher, $F(\omega_x)$ y $H(\omega_x)$ definen el error estadístico mínimo esperable de un proceso de estimación. Evaluamos con esta herramienta la eficiencia de la estimación para ambos modelos de control (Sec. 3.3).

Cuando τ es suficientemente pequeño, las mediciones proyectivas producen un decaimiento lento, conocido como “Efecto Zenón Cuántico” (QZE). Para valores de τ adecuados, por otro lado, el tiempo del decaimiento es mínimo, y el efecto es conocido como “Efecto Anti-Zenón Cuántico” (AZE). Trabajos previos han explorado el uso del efecto Zenón en la estimación de parámetros. En la Ref. [11] se utiliza el QZE para estimar parámetros del ambiente del sensor, y en la Ref. [17] se encontró experimentalmente que la estimación es más sencilla que con la evolución coherente. La contribución original de este trabajo radica en considerar, en vez de un baño como ambiente, una evolución coherente inducida por un término de intercambio entre dos niveles del sistema.

Para evaluar la eficiencia en la estimación, consideramos que la precisión en las mediciones está determinada por la distinguibilidad estadística entre los dos estados

que se obtienen al realizar una pequeña variación del parámetro. Durante la evolución coherente, una diferencia en una componente de ω introduce una diferencia en la velocidad de precesión del vector polarización, donde la diferencia de fase acumulada por el sensor crece indefinidamente en el tiempo (Figs. 3.1 y 3.4). Por ello, la evolución coherente permite una distinguibilidad arbitrariamente grande, provisto que haya suficiente tiempo disponible para medir el estado del sensor. En general, el tiempo disponible está limitado por los efectos de decoherencia intrínsecos al sensor. El control proyectivo, por otro lado, produce el decaimiento de la polarización del espín (Fig. 3.7), por lo que la distinguibilidad está acotada en el tiempo, ya que a tiempos grandes la polarización se anula, sin importar el valor del parámetro. No obstante, este máximo de distinguibilidad, en determinadas circunstancias, se alcanza antes que con el control coherente (Fig. 3.15).

Encontramos las circunstancias en las cuales el control proyectivo es más conveniente que el coherente, que están definidas por el valor de la separación de energía ω_z , también referido como offset. En la medida en la que éste crece, el efecto de las variaciones en ω_x se hace más despreciable, y el control coherente pierde distinguibilidad. El decaimiento producido por el control proyectivo provee en cambio una dinámica que, elegido correctamente el control, ofrece una distinguibilidad máxima en tiempos menores que para el caso de la evolución coherente (Fig. 3.16). La Fig. 3.17 junto con la Ec. 3.61 resumen estos resultados, comparando la máxima información extraíble con ambos tipos de control en función de ω_z y el tiempo total del experimento, evidenciando las regiones donde cada uno es conveniente. En particular, mostramos que cuando el offset es grande, el efecto Zenón cuántico amplifica la información extraíble del sensor sobre el campo transversal.

Evaluamos la aplicación de este método en el marco de varios sistemas de interés práctico:

1. Un espín 1/2 empleado como sensor de un campo magnético alterno fuera de resonancia (Sec. 4.1), donde la intensidad del campo alterno B_1 corresponde a la amplitud de transición $\omega_x = \gamma B_1$, y la frecuencia de oscilación del campo ω relativa a la frecuencia de Larmor $\omega_0 = \gamma B_0$ determina el offset $\omega_z = \omega - \omega_0$. Tales circunstancias se pueden dar cuando la frecuencia de oscilación ω del campo alterno o la intensidad del campo estático B_0 no pueden ser controladas para poner al espín en resonancia. Este último caso se da, por ejemplo, cuando el campo magnético a lo largo de la muestra no es homogéneo (ver Ref. [23]).
2. Estimación del acople entre dos espines interactuantes (Sec. 4.2) durante un experimento de polarización cruzada. Esta clase de experimentos consiste en la transferencia de polarización entre una especie de alta abundancia/polarización I a una de baja abundancia y/o factor giromagnético pequeño S . Para ello, los espines

son expuestos a un campo magnético $B_0 \mathbf{z}$, que define sus frecuencias de Larmor, y campos de radiofrecuencia $B_{1,I}$ y $B_{1,S}$ en resonancia con cada uno de ellos respectivamente. La transferencia de polarización es gobernada por el término de interacción dipolar b entre los espines, que corresponde a $\hbar\omega_x$. Sin embargo, la amplitud de este intercambio es fuertemente dependiente de la condición de Hartmann-Hahn, $\Delta := \hbar(\gamma_I B_{1,I} - \gamma_S B_{1,S}) = 0$. Esta diferencia Δ corresponde a $\hbar\omega_z$ cuando es no nula, y existen circunstancias donde no es posible despreciarla, como es el caso de sistemas en estado sólido en muestras policristalinas (ver Refs. [27–29]), que presentan un espectro de frecuencias de resonancia muy amplio.

3. Estimación de acoples en un sistema de tres espines (Sec. 4.3), entre una especie insensible S y dos sensibles I . Este caso es similar al anterior, tomando por ejemplo el acople entre los espines S e I como parámetro a estimar ω_x . Pero en este caso, incluso satisfaciendo la condición de resonancia, el acople entre los espines sensibles d dificulta la transferencia de polarización que permite la estimación de b , siendo d proporcional a ω_z .
4. Estimación de acoples en sistemas de muchos espines interactuantes (Sec. 4.4). En este ejemplo se considera un sistema multiespin. Su dinámica compleja puede ser reducida mediante la aplicación de las mediciones proyectivas a la de un único espín interactuando mediante un acople efectivo b con el resto de sus primeros vecinos. En este caso el tiempo óptimo de medición es provisto por el marco presentado en este trabajo, y las interacciones a segundos vecinos o entre los primeros vecinos pueden ser despreciadas.

Por último, consideramos el ambiente del sensor como aparato de medición para realizar las mediciones proyectivas. Para ello, separamos la evolución en dos etapas. Una en la que el sensor interactúa con un campo homogéneo coherente por un tiempo τ_c , seguida de otra en la que interactúa con el ambiente por tiempo τ_a , repitiéndose periódicamente. Encontramos que en el límite en el que los tiempos de correlación del baño son cortos relativos a τ_a , esta segunda interacción anula las coherencias en el sistema, efectivamente mediando una medición proyectiva. Reencontramos los resultados obtenidos en la Sec. 3.1 para la evolución coherente y proyectiva. Sin embargo, este esquema abre la posibilidad de una medición parcial, cuando el tiempo de interacción con el ambiente es pequeño. Encontramos que en el límite de τ_a corto relativo a los tiempos de correlación, el sistema decae de forma espiralada, y los parámetros que definen al ambiente se ven reflejados en una frecuencia de oscilación efectiva. Este esquema puede entonces facilitar un método de medición eficiente y no invasivo para dichos parámetros.

Apéndice A

Derivaciones analíticas de los resultados principales

Consideraremos la estimación de la componente \mathbf{x} del campo magnético $\mathbf{B} = B_x \mathbf{x} + B_z \mathbf{z}$ mediante la medición proyectiva de la componente \mathbf{z} del espín I_z de una partícula de espín $\frac{1}{2}$ transcurrido un tiempo t desde el comienzo del experimento. Incorporaremos luego el efecto de las mediciones proyectivas sobre I_z cada tiempo τ en la dinámica de ρ .

Definiremos como $\mathcal{I} = \{|\downarrow\rangle, |\uparrow\rangle\}$ a la base de autovectores de I_z con autovalores $\frac{1}{2}$ y $-\frac{1}{2}$ respectivamente. Denotaremos por \mathbf{p} al vector polarización definido por $\rho = \frac{1}{2} [\mathbf{I} + \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}]$. La condición inicial del ensamble será siempre $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}(0) = p_0 \mathbf{z}$.

A.1. Información de Fisher Cuántica en función del vector polarización

Tomemos un estado cuántico caracterizado por \mathbf{p} dependiente de algún parámetro x . La QFI está dada por

$$H(x) = \sum_i \frac{(\partial_x p_i)^2}{p_i} + 2 \sum_{i \neq j} \frac{(p_i - p_j)^2}{p_i + p_j} |\langle p_i | \partial_x | p_j \rangle|^2, \quad (\text{A.1})$$

donde $|p_i\rangle$ representa al autovector de autovalor p_i .

La matriz densidad ρ es diagonalizada por los vectores

$$\left| \frac{1 + \mathbf{p}}{2} \right\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |\uparrow\rangle + e^{i\varphi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |\downarrow\rangle, \quad (\text{A.2})$$

$$\left| \frac{1 - \mathbf{p}}{2} \right\rangle = e^{-i\varphi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |\uparrow\rangle - \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |\downarrow\rangle, \quad (\text{A.3})$$

$$(\text{A.4})$$

de autovalores $\frac{1}{2}(1 + \mathbf{p})$ y $\frac{1}{2}(1 - \mathbf{p})$ respectivamente, donde \mathbf{p} es el módulo y θ y φ son los ángulos azimutal y polar de \mathbf{p} .

El término relativo a la mezcla de la QFI toma la forma

$$\sum_{i:p_i \neq 0} \frac{(\partial_x p_i)^2}{p_i} = \frac{(\partial_x (\frac{1+\mathbf{p}}{2}))^2}{\frac{1+\mathbf{p}}{2}} + \frac{(\partial_x (\frac{1-\mathbf{p}}{2}))^2}{\frac{1-\mathbf{p}}{2}} \quad (\text{A.5})$$

$$= \frac{1}{2} (\partial_x \mathbf{p})^2 \left(\frac{1}{1+\mathbf{p}} + \frac{1}{1-\mathbf{p}} \right) \quad (\text{A.6})$$

$$= \frac{(\partial_x \mathbf{p})^2}{1-\mathbf{p}^2} = \frac{(\partial_x \mathbf{p}_r)^2}{1-\mathbf{p}^2}. \quad (\text{A.7})$$

Por otro lado,

$$\partial_x \left| \frac{1+\mathbf{p}}{2} \right\rangle = \partial_x \theta \frac{1}{2} \left(-\sin \left(\frac{\theta}{2} \right) |\uparrow\rangle + e^{i\varphi} \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) |\downarrow\rangle \right) + i \partial_x \varphi e^{i\varphi} \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) |\downarrow\rangle \quad (\text{A.8})$$

$$= e^{i\varphi} \left(-\frac{1}{2} \partial_x \theta \left| \frac{1-\mathbf{p}}{2} \right\rangle + i \partial_x \varphi \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) |\downarrow\rangle \right), \quad (\text{A.9})$$

$$\partial_x \left| \frac{1-\mathbf{p}}{2} \right\rangle = \partial_x \theta \frac{1}{2} \left(e^{-i\varphi} \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) |\uparrow\rangle + \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) |\downarrow\rangle \right) - i \partial_x \varphi e^{-i\varphi} \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) |\uparrow\rangle \quad (\text{A.10})$$

$$= e^{-i\varphi} \left(\frac{1}{2} \partial_x \theta \left| \frac{1+\mathbf{p}}{2} \right\rangle - i \partial_x \varphi \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) |\downarrow\rangle \right), \quad (\text{A.11})$$

$$(\text{A.12})$$

de donde (usando $2 \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) = \sin(\theta)$),

$$\left| \left\langle \frac{1 \mp \mathbf{p}}{2} \left| \partial_x \left| \frac{1 \pm \mathbf{p}}{2} \right\rangle \right. \right\rangle \right|^2 = \frac{1}{4} [(\partial_x \theta)^2 + \sin^2 \theta (\partial_x \varphi)^2]. \quad (\text{A.13})$$

Considerando además que

$$\frac{(\frac{1+\mathbf{p}}{2} - \frac{1-\mathbf{p}}{2})^2}{\frac{1+\mathbf{p}}{2} + \frac{1-\mathbf{p}}{2}} = \mathbf{p}^2, \quad (\text{A.14})$$

el segundo término toma la forma

$$2 \sum_{i \neq j} \frac{(p_i - p_j)^2}{p_i + p_j} |\langle p_i | \partial_x | p_j \rangle|^2 = \mathbf{p}^2 [(\partial_x \theta)^2 + \sin^2 \theta (\partial_x \varphi)^2] \quad (\text{A.15})$$

$$= (\partial_x \mathbf{p}_t)^2, \quad (\text{A.16})$$

de donde finalmente

$$H(x) = \frac{1}{1-\mathbf{p}^2} (\partial_x \mathbf{p}_r)^2 + (\partial_x \mathbf{p}_t)^2. \quad (\text{A.17})$$

A.2. Información de Fisher Cuántica en subespacios de Hilbert

Consideremos un sistema de N niveles evolucionando desde el estado inicial ρ_0 bajo el efecto de un Hamiltoniano H , y dos vectores ortogonales $|0\rangle$ y $|1\rangle$ tal que

$$H = \sum_{\alpha, \beta \in \{0, 1\}} |\alpha\rangle \langle \alpha| H |\beta\rangle \langle \beta| + \sum_{\alpha, \beta \notin \{0, 1\}} |\alpha\rangle \langle \alpha| H |\beta\rangle \langle \beta|, \quad (\text{A.18})$$

$$\rho_0 = \sum_{\alpha, \beta \in \{0, 1\}} |\alpha\rangle \langle \alpha| H |\beta\rangle \langle \beta| + \sum_{\alpha, \beta \notin \{0, 1\}} |\alpha\rangle \langle \alpha| H |\beta\rangle \langle \beta|. \quad (\text{A.19})$$

Es decir, tanto H como ρ_0 poseen un bloque separado en el espacio \mathcal{H}_0 generado por $\{|0\rangle, |1\rangle\}$.

Entonces, la ecuación de von Neumann para la evolución de la matriz densidad,

$$i\hbar d_t \rho = [H, \rho], \quad (\text{A.20})$$

se reduce en este subespacio a

$$i\hbar d_t \langle \alpha | \rho | \beta \rangle = \langle \alpha | H \rho | \beta \rangle - \langle \alpha | \rho H | \beta \rangle \quad (\text{A.21})$$

$$= \sum_{\gamma \in \{0, 1\}} [\langle \alpha | H | \gamma \rangle \langle \gamma | \rho | \beta \rangle - \langle \alpha | \rho | \gamma \rangle \langle \gamma | H | \beta \rangle], \quad (\alpha, \beta \in \{0, 1\}) \quad (\text{A.22})$$

Es decir, la matriz densidad evoluciona independientemente sobre este subespacio. De este modo, este bloque conservará su traza, y los autovalores permanecerán en este subespacio como función del tiempo y de los parámetros del Hamiltoniano, con lo que sus variaciones también. En vista de esto, la QFI se separará en en dos términos, uno involucrando subíndices 0 y 1, y el otro no.

Como la traza $p_0 + p_1 := p$ de este bloque es distinta de 1, éste ya no puede ser descrito por la forma $\frac{1}{2} [\mathbf{I}_b + \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}_b]$ (donde el subíndice b denota que sólo actúa sobre elementos del espacio generado por $\{|0\rangle, |1\rangle\}$) sino $\frac{1}{2} p [\mathbf{I}_b + \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}_b]$. En términos de este vector polarización, tenemos $p_0 = \frac{1}{2} p (1 + \mathbf{p})$ y $p_1 = \frac{1}{2} p (1 - \mathbf{p})$. De modo que $p_0 + p_1 = p$ y $p_0 - p_1 = p\mathbf{p}$. Reemplazando esto en el desarrollo de la sección anterior, observamos que el término de la QFI asociada a este bloque toma ahora la forma

$$H(x) = p \left(\frac{1}{1 - \mathbf{p}^2} (\partial_x \mathbf{p}_r)^2 + (\partial_x \mathbf{p}_t)^2 \right). \quad (\text{A.23})$$

A.3. Evolución de un sistema de dos niveles bajo mediciones proyectivas

El Hamiltoniano es

$$H = -\frac{1}{2}\hbar\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (\text{A.24})$$

donde $\boldsymbol{\omega} = \omega_x \mathbf{x} + \omega_z \mathbf{z}$ será denominada la velocidad angular y $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ son los operadores de Pauli.

La ecuación de von Neumann es

$$i\hbar d_t \rho = [H, \rho], \quad (\text{A.25})$$

o, tomando $\rho = \frac{1}{2} [\mathbf{I} + \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}]$,

$$id_t \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \left[\frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma} \right] \quad (\text{A.26})$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i,j \in \{x,y,z\}} \omega_i \mathbf{p}_j [\sigma_i, \sigma_j] \quad (\text{A.27})$$

$$= i \sum_{i,j \in \{x,y,z\}} \varepsilon_{ijk} \omega_i \mathbf{p}_j \sigma_k \quad (\text{A.28})$$

$$= i(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}) \cdot \boldsymbol{\sigma}. \quad (\text{A.29})$$

Recordando que, si $|+i\rangle$ es el autovector de σ_i de autovalor 1, $\langle +i | \sigma_j | +i \rangle = \delta_{ij}$, tendremos $\langle +i | \boldsymbol{\sigma} | +i \rangle = \mathbf{e}_i$, y así

$$\langle +i | d_t \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma} | +i \rangle = \langle +i | (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}) \cdot \boldsymbol{\sigma} | +i \rangle, \quad (\text{A.30})$$

$$d_t \mathbf{p} \cdot \langle +i | \boldsymbol{\sigma} | +i \rangle = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}) \cdot \langle +i | \boldsymbol{\sigma} | +i \rangle, \quad (\text{A.31})$$

$$d_t \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_i = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}) \cdot \mathbf{e}_i, \quad (\text{A.32})$$

de modo que

$$d_t \mathbf{p} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}. \quad (\text{A.33})$$

Tras un tiempo t , el efecto sobre \mathbf{p} será el de haberlo rotado en $\boldsymbol{\omega}t$, es decir

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{R}[\boldsymbol{\omega}t]\mathbf{p}(0) \quad (\text{A.34})$$

$$= \mathbf{p}_0 \mathbf{R}[\boldsymbol{\omega}t]\mathbf{z} \quad (\text{A.35})$$

$$= \mathbf{p}_0 \begin{pmatrix} \frac{\omega_x \omega_z}{\omega^2} (1 - \cos(\omega t)) \\ -\frac{\omega_x}{\omega} \sin(\omega t) \\ \frac{\omega_z^2}{\omega^2} + \frac{\omega_x^2}{\omega^2} \cos(\omega t) \end{pmatrix} \quad (\text{A.36})$$

$$= \mathbf{p}_0 \boldsymbol{\beta}(t), \quad \boldsymbol{\beta}(t) = \mathbf{R}[\boldsymbol{\omega}t]\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \frac{\omega_x \omega_z}{\omega^2} (1 - \cos(\omega t)) \\ -\frac{\omega_x}{\omega} \sin(\omega t) \\ \frac{\omega_z^2}{\omega^2} + \frac{\omega_x^2}{\omega^2} \cos(\omega t) \end{pmatrix}. \quad (\text{A.37})$$

Vale la pena observar que $\boldsymbol{\beta}$ es un vector unitario.

Las probabilidades p^\uparrow y p^\downarrow de encontrar al sistema en los estados $|\uparrow\rangle$ y $|\downarrow\rangle$ son $\frac{1}{2} [1 + \mathbf{z} \cdot \mathbf{p}]$ y $\frac{1}{2} [1 - \mathbf{z} \cdot \mathbf{p}]$ respectivamente, es decir

$$p^\uparrow(t) = \frac{1 + p_0 \alpha(t)}{2}, \quad (\text{A.38})$$

$$p^\downarrow(t) = \frac{1 - p_0 \alpha(t)}{2}, \quad (\text{A.39})$$

$$\alpha(t) = \frac{\omega_z^2}{\omega^2} + \frac{\omega_x^2}{\omega^2} \cos(\omega t), \quad (\text{A.40})$$

donde α es el factor $\mathbf{z} \cdot \boldsymbol{\beta}(\tau) = (\mathbf{z} \cdot \mathbf{p}(t))/(\mathbf{z} \cdot \mathbf{p}(0))$.

Las mediciones proyectivas son introducidas con la condición

$$\mathbf{p}(n\tau^+) = (\mathbf{z} \cdot \mathbf{p}(n\tau^-))\mathbf{z}, \quad (\text{A.41})$$

de modo que

$$\mathbf{p}((n+1)\tau^+) = \mathbf{p}((n+1)\tau^+)\mathbf{z} \quad (\text{A.42})$$

$$= (\mathbf{z} \cdot \mathbf{p}((n+1)\tau^-))\mathbf{z} \quad (\text{A.43})$$

$$= (\mathbf{z} \cdot (\mathbf{R}[\boldsymbol{\omega}\tau]\mathbf{p}(n\tau^+)))\mathbf{z} \quad (\text{A.44})$$

$$= (\mathbf{z} \cdot (\mathbf{R}[\boldsymbol{\omega}\tau]\mathbf{p}(n\tau^+)\mathbf{z}))\mathbf{z} \quad (\text{A.45})$$

$$= \mathbf{p}(n\tau^+)(\mathbf{z} \cdot \boldsymbol{\beta}(\tau))\mathbf{z} \quad (\text{A.46})$$

$$= \alpha(\tau)\mathbf{p}(n\tau^+)\mathbf{z}, \quad (\text{A.47})$$

es decir que $\mathbf{p}((n+1)\tau^+) = \alpha(\tau)\mathbf{p}(n\tau^+) = \dots = (\alpha(\tau))^{n+1}\mathbf{p}(0)$, y entonces

$$\mathbf{p}(n\tau + \mathbf{t}) = \mathbf{R}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{t}]\mathbf{p}(n\tau^+) \quad (\text{A.48})$$

$$= \mathbf{p}_0(\alpha(\tau))^n \mathbf{R}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{t}]\mathbf{z} \quad (\text{A.49})$$

$$= \mathbf{p}_0(\alpha(\tau))^n \boldsymbol{\beta}(\mathbf{t}). \quad (\text{A.50})$$

A.4. Estimación de máxima verosimilitud

El modelo establecido define la distribución de probabilidad $(p^\uparrow, p^\downarrow)$ de encontrar al sistema en los estados $(|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle)$ como función del parámetro ω_x . Realizadas N mediciones proyectivas a tiempo t , se habrá encontrado al sistema n^\uparrow y n^\downarrow veces en el estado $|\uparrow\rangle$ y $|\downarrow\rangle$ respectivamente, con $n^\uparrow + n^\downarrow = N$. La probabilidad $P(n^\uparrow, n^\downarrow | \omega_x)$ de obtener dichas mediciones, considerando a las mediciones como independientes, es

$$P(n^\uparrow, n^\downarrow | \omega_x) = (p^\uparrow(t))^{n^\uparrow} (p^\downarrow(t))^{n^\downarrow}. \quad (\text{A.51})$$

El estimador de máxima verosimilitud $\hat{\omega}_x$ se define como

$$\hat{\omega}_x(n^\uparrow, n^\downarrow) = \arg \max_{\omega_x} P(n^\uparrow, n^\downarrow | \omega_x), \quad (\text{A.52})$$

el valor de ω_x para el cual se maximiza la probabilidad de los datos. Cuando la probabilidad está descompuesta como un producto, es habitual tomar el logaritmo de P y maximizar éste, buscando ω_x tal que

$$\partial_{\omega_x} \log P(n^\uparrow, n^\downarrow | \omega_x) = \partial_{\omega_x} [n^\uparrow \log p^\uparrow(t) + n^\downarrow \log p^\downarrow(t)] \quad (\text{A.53})$$

$$= n^\uparrow \frac{\partial_{\omega_x} p^\uparrow(t)}{p^\uparrow(t)} + n^\downarrow \frac{\partial_{\omega_x} p^\downarrow(t)}{p^\downarrow(t)} = 0. \quad (\text{A.54})$$

Considerando que $p^\uparrow(t) = \frac{1}{2}(1 + p(t))$ y $p^\downarrow(t) = \frac{1}{2}(1 - p(t))$, esta igualdad implica

$$p(t) = \nu^\uparrow - \nu^\downarrow, \quad (\text{A.55})$$

donde $\nu^\uparrow = n^\uparrow/N$ y $\nu^\downarrow = n^\downarrow/N$ son la fracción de resultados que dieron $|\uparrow\rangle$ y $|\downarrow\rangle$ respectivamente.

La solución a ésta ecuación, considerando la forma de α respecto de ω_x , sólo puede ser numérica.

A.5. Información de Fisher Clásica (CFI)

La CFI de ω_x se obtiene de la Ec. 2.40, identificando a ω_x como el parámetro x , $p^\uparrow(t)$ y $p^\downarrow(t)$ como las probabilidades $P_x(\xi)$ del resultado $\xi = |\uparrow\rangle$ y $\xi = |\downarrow\rangle$ a tiempo t , respectivamente, y vale

$$F(\omega_x) = \frac{(\partial_{\omega_x} p^\uparrow(t))^2}{p^\uparrow(t)} + \frac{(\partial_{\omega_x} p^\downarrow(t))^2}{p^\downarrow(t)} = \frac{(\partial_{\omega_x} p(t))^2}{1 - p^2(t)} \quad (\text{A.56})$$

La derivada parcial de p contiene información de la dependencia con ω_x tanto del decaimiento exponencial como de la evolución coherente, y vale

$$\partial_{\omega_x} p(t) = \partial_{\omega_x} p_n \alpha(\mathbf{t}) + p_n \partial_{\omega_x} \alpha(\mathbf{t}) \quad (\text{A.57})$$

$$= p_0 \left(n(\alpha(\tau))^{n-1} \alpha'(\tau) \alpha(\mathbf{t}) + (\alpha(\tau))^n \alpha'(\mathbf{t}) \right) \quad (\text{A.58})$$

$$= p_0 (\alpha(\tau))^{n-1} (n \alpha'(\tau) \alpha(\mathbf{t}) + \alpha(\tau) \alpha'(\mathbf{t})), \quad (\text{A.59})$$

$$\alpha'(\mathbf{t}) = \partial_{\omega_x} \alpha(\mathbf{t}) = -\cos \theta \left[2 \frac{1 - \cos(\omega \mathbf{t})}{\omega} \sin^2 \theta + \mathbf{t} \sin(\omega \mathbf{t}) \cos^2 \theta \right], \quad (\text{A.60})$$

notando que $\partial_{\omega_x} \cos^2 \theta = 2 \cos \theta \sin^2 \theta / \omega$ y $\partial_{\omega_x} \omega = \cos \theta$.

Expandiendo α' , la CFI es

$$F(\omega_x) = \frac{p_0^2 (\alpha(\tau))^{2(n-1)} (n \alpha'(\tau) \alpha(\mathbf{t}) + (\alpha(\tau))^n \alpha'(\mathbf{t}))^2}{1 - p_0^2 (\alpha(\tau))^{2n} (\alpha(\mathbf{t}))^2} \quad (\text{A.61})$$

$$\begin{aligned} &= p_0^2 \cos^2 \theta \frac{(\alpha(\tau))^{2(n-1)}}{1 - p_0^2 (\alpha(\tau))^{2n} (\alpha(\mathbf{t}))^2} \\ &\cdot \left[n \tau \left(2 \frac{\sin^2(\frac{1}{2} \omega \tau)}{\frac{1}{2} \omega \tau} \sin^2 \theta + \sin(\omega \tau) \cos^2 \theta \right) \alpha(\mathbf{t}) \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{t} \left(2 \frac{\sin^2(\frac{1}{2} \omega \mathbf{t})}{\frac{1}{2} \omega \mathbf{t}} + \sin(\omega \mathbf{t}) \cos^2 \theta \right) \alpha(\tau) \right]^2 \end{aligned} \quad (\text{A.62})$$

A.6. Información de Fisher Cuántica (QFI)

Considerando la forma de la Ec. A.50,

$$\mathbf{p} = p_0 (\alpha(\tau))^n, \quad (\text{A.63})$$

$$\partial_{\omega_x} \mathbf{p}(n\tau + \mathbf{t}) = p_0 \left[n(\alpha(\tau))^{n-1} \partial_{\omega_x} \alpha(\tau) \boldsymbol{\beta}(\mathbf{t}) + (\alpha(\tau))^n \partial_{\omega_x} \boldsymbol{\beta}(\mathbf{t}) \right]. \quad (\text{A.64})$$

Dado que $\boldsymbol{\beta}(t)$ es un vector unitario para todo ω_x , $\boldsymbol{\beta} \cdot \partial_{\omega_x} \boldsymbol{\beta} = 0$, de modo que el

cuadrado de las componentes radial y tangencial son

$$(\partial_{\omega_x} \mathbf{p}_r)^2 = p_0^2 n^2 (\alpha(\tau))^{2(n-1)} (\partial_{\omega_x} \alpha(\tau))^2, \quad (\text{A.65})$$

$$(\partial_{\omega_x} \mathbf{p}_t)^2 = p_0^2 (\alpha(\tau))^{2n} (\partial_{\omega_x} \boldsymbol{\beta}(\mathbf{t}))^2. \quad (\text{A.66})$$

con lo que la QFI resulta

$$H(\omega_x) = p_0^2 n^2 \frac{(\alpha(\tau))^{2(n-1)}}{1 - p_0^2 (\alpha(\tau))^{2n}} (\partial_{\omega_x} \alpha(\tau))^2 + p_0^2 (\alpha(\tau))^{2n} (\partial_{\omega_x} \boldsymbol{\beta}(\mathbf{t}))^2, \quad (\text{A.67})$$

$$(\partial_{\omega_x} \alpha(\tau))^2 = \left(\frac{\omega_x}{\omega} \right)^2 \left[2 \frac{\omega_z^2}{\omega^3} (1 - \cos(\omega\tau)) + \frac{\omega_x^2}{\omega^2} \tau \sin(\omega\tau) \right]^2, \quad (\text{A.68})$$

$$(\partial_{\omega_x} \boldsymbol{\beta}(\mathbf{t}))^2 = \frac{\omega_x^4}{\omega^4} \mathbf{t}^2 + 2 \frac{\omega_x^2 \omega_z^2}{\omega^5} \sin(\omega\mathbf{t}) \mathbf{t} + \frac{\omega_z^2}{\omega^4} \left[(1 - \cos(\omega\mathbf{t}))^2 + \frac{\omega_z^2}{\omega^2} \sin^2(\omega\mathbf{t}) \right]. \quad (\text{A.69})$$

El primer término es constante como función del tiempo entre mediciones \mathbf{t} , y el segundo término está acotado por $p_0^2 (\alpha(\tau))^{2n} \max_{\mathbf{t} \in [0, \tau)} (\partial_{\omega_x} \boldsymbol{\beta}(\mathbf{t}))^2$.

A.7. Comportamiento de la CFI

Definimos la función

$$G(\omega_x) = p_0^2 \cos^2 \theta(\mathbf{n}\tau)^2 \frac{\alpha^{2(n-1)}}{1 - p_0^2 \alpha^{2n}} \left[2 \frac{\sin^2 \left(\frac{1}{2} \omega\tau \right)}{\frac{1}{2} \omega\tau} \sin^2 \theta + \sin(\omega\tau) \cos^2 \theta \right]^2, \quad \mathbf{n} = t/\tau, \quad (\text{A.70})$$

donde ahora sólo habrán ocurrencias de α evaluada en τ , por lo que la denotamos como α (sin argumento). La función G satisface que, para $\mathbf{t} = 0$, $H(\omega_x) = F(\omega_x) = G(\omega_x)$. Esta función aproxima F y H , y es suave.

La función puede ser descripta como $\beta \mathfrak{G}$, donde β no depende del tiempo, y

$$\mathfrak{G} = \mathbf{n}^2 \frac{\alpha^{2(n-1)}}{1 - p_0^2 \alpha^{2n}}. \quad (\text{A.71})$$

La derivada respecto de \mathbf{n} de \mathfrak{G} es

$$\partial_{\mathbf{n}} \mathfrak{G} = \frac{2\mathbf{n}\alpha^{2(n-1)}}{(1 - p_0^2 \alpha^{2n})^2} \left[(1 + \mathbf{n} \log |\alpha|) (1 - p_0^2 \alpha^{2n}) + \mathbf{n} p_0^2 \alpha^{2n} \log |\alpha| \right] \quad (\text{A.72})$$

$$= \frac{2\mathbf{n}\alpha^{2(n-1)}}{(1 - p_0^2 \alpha^{2n})^2} \left[1 + \mathbf{n} \log |\alpha| - p_0^2 \alpha^{2n} \right]. \quad (\text{A.73})$$

En máximo entonces está dado por

$$1 + \mathbf{n} \log |\alpha| - p_0^2 \alpha^{2\mathbf{n}} = 1 + \mathbf{n} \log |\alpha| - p_0^2 e^{2\mathbf{n} \log |\alpha|} = 0, \quad (\text{A.74})$$

o, bajo la sustitución $x = -2(\mathbf{n} \log |\alpha| + 1)$,

$$xe^x = -2p_0^2/e^2. \quad (\text{A.75})$$

Las condiciones $\alpha \in [0, 1]$ y $p_0 \in [0, 1]$ implican que $x \in (-2, \infty)$ y $-2p_0^2/e^2$ respectivamente. Estas dos condiciones garantizan que $x = W(-2p_0^2/e^2)$ es la única solución a la Ec. A.75, donde W es la rama principal de la función W de Lambert.

Expresando x en función de \mathbf{n} , y \mathbf{n} como t/τ , se obtiene el tiempo que maximiza \mathfrak{G} , dado por

$$t_{\max} = -\frac{\tau}{\log |\alpha|} \xi(p_0), \quad \xi(p_0) = 1 + \frac{1}{2} W(-2p_0^2/e^2). \quad (\text{A.76})$$

Como $p_0 \in [0, 1]$, $\xi(p_0) \in (0, 7965, 1)$. El valor $\mathcal{T} = -\tau/\log |\alpha|$ es el tiempo característico de p_n como función de t .

Sustituyendo la Ec. A.76 en la Ec. A.70, se obtiene el máximo de G en función de τ ,

$$G_{\max} = \varphi(p_0) \frac{\tau^2 \cos^2 \theta}{(\alpha \log |\alpha|)^2} \left[2 \frac{\sin^2(\frac{1}{2}\omega\tau)}{\frac{1}{2}\omega\tau} \sin^2 \theta + \sin(\omega\tau) \cos^2 \theta \right]^2, \quad \varphi(p_0) = \frac{p_0^2 (\xi(p_0))^2}{e^{2\xi(p_0)} - p_0^2} \quad (\text{A.77})$$

La única raíz de G_{\max} está dada por

$$\left(\frac{\omega_x}{\omega_z} \right)^2 x = -\frac{\sin^2(\frac{1}{2}x)}{\sin(x)}, \quad x = \omega\tau. \quad (\text{A.78})$$

Como $x > 0$, el lado derecho debe ser mayor que 0, es decir que $x \in (\pi, 2\pi)$. En ese entorno, el lado derecho va monótonamente desde ∞ a 0, dado que

$$\partial_x \left(-\frac{\sin^2(\frac{1}{2}x)}{\sin(x)} \right) = \sin\left(\frac{1}{2}x\right) \frac{\cos(\frac{1}{2}x)}{\sin^2(x)} < 0 \forall x \in (\pi, 2\pi). \quad (\text{A.79})$$

Las divergencias de G_{\max} sólo pueden ocurrir cuando $\alpha \rightarrow 0$ o $\log |\alpha| \rightarrow 0$. La primera equivale a $\cos(\omega\tau) \rightarrow 1 - 1/\cos^2 \theta$, y sólo ocurre si $\omega_z < \omega_x/\sqrt{2}$. La segunda implica $\cos(\omega\tau) \rightarrow 1$, que ocurre siempre que $\tau \rightarrow T$.

A.7.1. Régimen zenón

Cuando $\tau \ll T$, $\cos(\omega\tau) \approx 1 - \frac{1}{2}\omega^2\tau^2$, de donde

$$\alpha \approx 1 - \frac{1}{2}\omega_x^2\tau^2, \quad (\text{A.80})$$

$$\log |\alpha| \approx -\frac{1}{2}\omega_x^2\tau^2. \quad (\text{A.81})$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{T} \approx -\frac{2}{\omega_x^2} \frac{1}{\tau}, \quad G_{\max} \approx 4\varphi(p_0)/\omega_x^2. \quad (\text{A.82})$$

A.7.2. Offset grande

Si $\omega_z \gg \omega_x$, $\cos \theta = \omega_x/\omega \approx 0$, de donde

$$\log |\alpha| \approx -\cos^2 \theta (1 - \cos(\omega\tau)), \quad (\text{A.83})$$

$$|\alpha|^\eta \approx e^{-\eta \cos^2 \theta (1 - \cos(\omega\tau))}. \quad (\text{A.84})$$

De allí que

$$\mathcal{T} \approx \frac{\omega}{\omega_x^2} \frac{\frac{1}{2}\omega\tau}{\sin^2(\frac{1}{2}\omega\tau)}, \quad (\text{A.85})$$

$$G_{\max} \rightarrow 4 \frac{\varphi(p_0)}{\omega_x^2}. \quad (\text{A.86})$$

Considerando la existencia de la raíz dada por la Ec. A.78 para todo ω_z , la convergencia de G_{\max} es sólo puntual. El mínimo de \mathcal{T} se encuentra minimizando $\frac{1}{2}\omega\tau / \sin^2(\frac{1}{2}\omega\tau)$, con $\tau \approx \frac{1}{2}T$ (régimen Zenón). Este valor es aproximadamente 1,38, con lo que el tiempo mínimo queda dado por

$$1,38 \frac{\omega}{\omega_x^2}. \quad (\text{A.87})$$

A.7.3. Offset pequeño

Si $\omega_x \ll \omega_z$, $\sin \theta = \omega_z/\omega \approx 0$. Reescribiendo a α como

$$\alpha = \cos(\omega\tau) - \sin^2 \theta (1 - \cos(\omega\tau)), \quad (\text{A.88})$$

Para $\tau = \pi/\omega + \delta\tau$, $|\cos(\omega\tau)| \approx 1 - \frac{1}{2}\omega^2\tau^2$, con lo que

$$|\alpha| \approx 1 - \frac{1}{2}\omega_x^2\delta\tau^2, \quad (\text{A.89})$$

$$\log |\alpha| \approx -\frac{1}{2}\omega_x^2\delta\tau^2. \quad (\text{A.90})$$

Esto a su vez implica

$$\mathcal{T} = \frac{2}{\omega_x^2} \frac{\tau}{\delta\tau^2}, \quad (\text{A.91})$$

$$G \rightarrow 4 \frac{\varphi(p_0)}{\omega_x^2} \frac{\tau^2}{\delta\tau^2}. \quad (\text{A.92})$$

Bibliografía

- [1] Degen, C., Reinhard, F., Cappellaro, P. Quantum sensing. *Reviews of Modern Physics*, **89** (3), 2017. [1](#)
- [2] Katti, G., Ara, S., Shireen, D. Magnetic resonance imaging (mri) - a review. *Intl J Dental Clin*, **3**, 03 2011. [1](#)
- [3] Balasubramanian, G., Chan, I. Y., Kolesov, R., Al-Hmoud, M., Tisler, J., Shin, C., *et al.* Nanoscale imaging magnetometry with diamond spins under ambient conditions. *Nature*, **455** (7213), 648–651, oct. 2008. URL <http://www.nature.com/articles/nature07278>. [1](#)
- [4] Dolde, F., Fedder, H., Doherty, M. W., Nöbauer, T., Rempp, F., Balasubramanian, G., *et al.* Electric-field sensing using single diamond spins. *Nature Physics*, **7** (6), 459–463, jun. 2011. URL <http://www.nature.com/articles/nphys1969>. [1](#)
- [5] Kucsko, G., Maurer, P. C., Yao, N. Y., Kubo, M., Noh, H. J., Lo, P. K., *et al.* Nanometre-scale thermometry in a living cell. *Nature*, **500** (7460), 54–58, ago. 2013. URL <http://www.nature.com/articles/nature12373>. [1](#)
- [6] Brownnutt, M., Kumph, M., Rabl, P., Blatt, R. Ion-trap measurements of electric-field noise near surfaces. *Reviews of Modern Physics*, **87** (4), 1419–1482, dic. 2015. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.87.1419>. [1](#)
- [7] Leibfried, D. Toward Heisenberg-Limited Spectroscopy with Multiparticle Entangled States. *Science*, **304** (5676), 1476–1478, jun. 2004. URL <https://www.sciencemag.org/lookup/doi/10.1126/science.1097576>. [1](#)
- [8] Sewell, R. J., Koschorreck, M., Napolitano, M., Dubost, B., Behbood, N., Mitchell, M. W. Magnetic Sensitivity Beyond the Projection Noise Limit by Spin Squeezing. *Physical Review Letters*, **109** (25), 253605, dic. 2012. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.109.253605>. [1](#)
- [9] Zurek, W. H. Decoherence, einselection, and the quantum origins of the classical. *Reviews of Modern Physics*, **75** (3), 715–775, mayo 2003. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.75.715>. [2](#)

- [10] Suter, D., Álvarez, G. A. *Colloquium* : Protecting quantum information against environmental noise. *Reviews of Modern Physics*, **88** (4), 041001, oct. 2016. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.88.041001>. 2
- [11] Zwick, A., Álvarez, G. A., Kurizki, G. Maximizing Information on the Environment by Dynamically Controlled Qubit Probes. *Physical Review Applied*, **5** (1), 014007, ene. 2016. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevApplied.5.014007>. vii, vii, ix, ix, 2, 21, 33, 57
- [12] Misra, B., Sudarshan, E. C. G. The Zeno's paradox in quantum theory. *Journal of Mathematical Physics*, **18** (4), 756–763, abr. 1977. URL <http://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.523304>. 2
- [13] Chiu, C. B., Sudarshan, E. C. G., Misra, B. Time evolution of unstable quantum states and a resolution of Zeno's paradox. *Physical Review D*, **16** (2), 520–529, jul. 1977. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.16.520>. 2
- [14] Lewenstein, M., Rzazewski, K. Quantum anti-Zeno effect. *Physical Review A*, **61** (2), 022105, ene. 2000. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.61.022105>. 2
- [15] Kofman, A. G., Kurizki, G. Acceleration of quantum decay processes by frequent observations. *Nature*, **405** (6786), 546–550, jun. 2000. URL <http://www.nature.com/articles/35014537>. 2
- [16] Álvarez, G. A., Rao, D. D. B., Frydman, L., Kurizki, G. Zeno and Anti-Zeno Polarization Control of Spin Ensembles by Induced Dephasing. *Physical Review Letters*, **105** (16), 160401, oct. 2010. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.105.160401>. 2, 44
- [17] Bretschneider, C. O., Álvarez, G. A., Kurizki, G., Frydman, L. Controlling Spin-Spin Network Dynamics by Repeated Projective Measurements. *Physical Review Letters*, **108** (14), 140403, abr. 2012. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.108.140403>. vii, ix, 2, 3, 33, 46, 47, 57
- [18] Shankar, R. Principles of Quantum Mechanics – 2nd Edition. Plenum Press, 2011. 6
- [19] Shun-Ichi Amari, H. N. Methods of Information Geometry. American Mathematical Soc., 2007. 7
- [20] Wootters, W. K. Statistical distance and Hilbert space. *Physical Review D*, **23** (2), 357–362, ene. 1981. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.23.357>. 7, 8, 9, 10, 11, 12

- [21] Braunstein, S. L., Caves, C. M. Statistical distance and the geometry of quantum states. *Physical Review Letters*, **72** (22), 3439–3443, mayo 1994. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.72.3439>. 7, 9, 12, 13, 14
- [22] Zwick, A., Álvarez, G. A., Kurizki, G. Criticality of environmental information obtainable by dynamically controlled quantum probes. *Physical Review A*, **94** (4), 042122, oct. 2016. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.94.042122>. 32
- [23] Perlo, J., Demas, V., Casanova, F., Meriles, C. A., Reimer, J., Pines, A., *et al.* High-resolution nmr spectroscopy with a portable single-sided sensor. *Science*, 2005. URL <https://science.sciencemag.org/content/early/2005/04/07/science.1108944>. 40, 58
- [24] Slichter, C. P. Principles of Magnetic Resonance. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1990. 40, 43
- [25] Müller, L., Kumar, A., Baumann, T., Ernst, R. R. Transient oscillations in nmr cross-polarization experiments in solids. *Phys. Rev. Lett.*, **32**, 1402–1406, Jun 1974. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.32.1402>. 40
- [26] Hartmann, S. R., Hahn, E. L. Nuclear double resonance in the rotating frame. *Phys. Rev.*, **128**, 2042–2053, Dec 1962. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.128.2042>. 40, 41
- [27] Harris, K. J., Lupulescu, A., Lucier, B. E., Frydman, L., Schurko, R. W. Broad-band adiabatic inversion pulses for cross polarization in wideline solid-state nmr spectroscopy. *Journal of Magnetic Resonance*, **224**, 38–47, 2012. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S109078071200290X>. 44, 59
- [28] Raya, J., Perrone, B., Hirschinger, J. Chemical shift powder spectra enhanced by multiple-contact cross-polarization under slow magic-angle spinning. *Journal of Magnetic Resonance*, **227**, 93–102, 2013. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1090780712003898>.
- [29] Raya, J., Perrone, B., Bechinger, B., Hirschinger, J. Chemical shift powder spectra obtained by using rotor-directed exchange of orientations cross-polarization (rodeo-cp). *Chemical Physics Letters*, **508** (1), 155–164, 2011. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0009261411004076>. 44, 59
- [30] Chattah, A. K., Álvarez, G. A., Levstein, P. R., Cucchiatti, F. M., Pastawski, H. M., Raya, J., *et al.* Many-spin quantum dynamics during cross polarization

- in 8CB. *The Journal of Chemical Physics*, **119** (15), 7943–7951, oct. 2003. URL <https://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.1609394>. 45
- [31] Ferraro, E., Scala, M., Migliore, R., Napoli, A. On the validity of non-markovian master equation approaches for the entanglement dynamics of two-qubit systems. *Physica Scripta*, **T140**, 014042, sep 2010. URL <https://doi.org/10.1088/0031-8949/2010/t140/014042>. 46
- [32] Pastawski, H. M., Medina, E. ‘Tight Binding’ methods in quantum transport through molecules and small devices: From the coherent to the decoherent description. *arXiv:cond-mat/0103219*, mar. 2001. URL <http://arxiv.org/abs/cond-mat/0103219>, arXiv: cond-mat/0103219. 46

Agradecimientos

Creo que vengo pensando qué escribir acá desde que tuve que escribir la misma sección para la Licenciatura. El 2020 se consagró como el peor año de mi vida, por varios motivos, y hay tanto que siento que podría decir al respecto. Pero por otro lado, al fin siento que tengo las herramientas para afrontar la clase de dificultades que me detuvieron a lo largo de mi vida. Creo que esta vez, mejor decir poco acá.

Agradezco a cada persona que mira a los demás y dentro suyo, buscando qué mejorar. Y agradezco inmensamente a Any y Gonza en particular, por insistir en que lo mejor por hacer es no detenerse a lamentar las malas pasadas pasadas, sino procurar un porvenir mejor, que me ayudó a afrontar gran parte de las dificultades a lo largo de esta tesis.

